

# **Der Ingenieurbau**

- **Werkstoffe**
- **Elastizitätstheorie**

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

## Verzeichnis der Verfasser

## Werkstoffe des Bauwesens

1	Einleitung und Übersicht der Werkstoffe des Bauwesens . . . . .	1
2	Eigenschaften der Baustoffe im allgemeinen . . . . .	2
2.1	Mechanische Eigenschaften . . . . .	2
2.2	Physikalisch-chemische Erscheinungen . . . . .	7
3	Anorganisch mineralische Bindemittel . . . . .	11
3.1	Gips . . . . .	11
3.2	Kalk . . . . .	11
3.3	Zement . . . . .	12
3.3.1	Portlandzement . . . . .	12
3.3.2	Portland-Kompositzemente . . . . .	13
3.3.3	Weitere Zemente . . . . .	14
3.3.4	Hydratation der Zemente . . . . .	15
3.3.5	Wasserzementwert und Porenraum . . . . .	16
4	Beton . . . . .	20
4.1	Betonzuschlag . . . . .	20
4.1.1	Arten und Anforderungen . . . . .	20
4.1.2	Kornzusammensetzung . . . . .	22
4.2	Zugabewasser . . . . .	23
4.3	Frischbeton . . . . .	23
4.3.1	Eigenschaften . . . . .	23
4.3.2	Konsistenzmessungen . . . . .	25
4.4	Grüner Beton . . . . .	25
4.4.1	Grünfestigkeit . . . . .	26
4.4.2	Setzen und Kapillarschwinden . . . . .	27
4.5	Junger Beton . . . . .	27
4.6	Festbeton . . . . .	31
4.6.1	Druckfestigkeit . . . . .	32
4.6.1.1	Innere Einflüsse . . . . .	32
4.6.1.2	Äußere Einflüsse . . . . .	33
4.6.1.3	Art und Dauer der Belastung . . . . .	34
4.6.2	Zugfestigkeit . . . . .	37
4.6.3	Verformungsverhalten . . . . .	37
4.6.3.1	Druckbeanspruchung . . . . .	37
4.6.3.2	Zugbeanspruchung . . . . .	38
4.6.4	Zeitabhängiges Verformungsverhalten . . . . .	40
4.6.4.1	Schwinden und Quellen . . . . .	41
4.6.4.2	Kriechen und Relaxation . . . . .	43

4.6.5	Physikalische Eigenschaften . . . . .	45
4.6.5.1	Wasserdurchlässigkeit . . . . .	45
4.6.5.2	Luftdurchlässigkeit . . . . .	46
4.6.5.3	Diffusion . . . . .	47
4.6.5.4	Thermische Eigenschaften . . . . .	48
4.6.6	Langzeitverhalten . . . . .	49
4.6.6.1	Widerstand gegen physikalische Beanspruchungen . . . . .	50
4.6.6.2	Widerstand gegen chemische Beanspruchung . . . . .	52
4.6.6.3	Korrosion der Bewehrung . . . . .	54
5	Leichtbeton . . . . .	55
5.1	Leichtbeton mit geschlossenem Gefüge . . . . .	55
5.2	Leichtbeton mit haufwerksporigem Gefüge . . . . .	59
5.3	Porenleichtbeton (Schaumbeton) . . . . .	59
5.4	Porenbeton . . . . .	60
6	Faserbeton . . . . .	60
6.1	Allgemeine Gesichtspunkte . . . . .	60
6.2	Stahlfaserbeton . . . . .	63
6.3	Beton mit mineralischen Fasern . . . . .	64
6.4	Beton mit organischen Fasern . . . . .	65
6.5	Ferrozement . . . . .	66
7	Naturstein . . . . .	67
8	Keramische Baustoffe und Glas . . . . .	70
8.1	Ausgangsstoffe . . . . .	70
8.2	Ziegel- und Tonwaren . . . . .	70
8.3	Glas . . . . .	71
9	Metalle . . . . .	72
9.1	Aufbau und Struktur . . . . .	72
9.2	Phasendiagramme . . . . .	74
9.3	Thermische und mechanische Behandlungen . . . . .	76
9.4	Korrosion . . . . .	80
9.5	Stahl . . . . .	82
9.5.1	Einteilung und Prüfungen . . . . .	82
9.5.2	Baustähle . . . . .	84
9.5.3	Betonstähle . . . . .	90
9.5.4	Spannstähle . . . . .	93
9.5.5	Nichtrostende Stähle . . . . .	96
9.6	Eisen-Gußwerkstoffe . . . . .	97
9.7	Aluminiumlegierungen . . . . .	97
9.7.1	Zusammensetzung . . . . .	97
9.7.2	Mechanische Eigenschaften . . . . .	99
9.7.3	Korrosion . . . . .	103
10	Holz und Holzwerkstoffe . . . . .	104
10.1	Holz . . . . .	104
10.1.1	Aufbau . . . . .	104
10.1.2	Physikalische Eigenschaften . . . . .	105
10.1.3	Mechanische Eigenschaften . . . . .	107
10.1.4	Chemische und biologische Einwirkungen . . . . .	108
10.2	Holzwerkstoffe . . . . .	109
10.2.1	Aufbau . . . . .	109
10.2.2	Physikalische Eigenschaften . . . . .	110

10.2.3	Mechanische Eigenschaften . . . . .	110
11	Kunststoffe . . . . .	111
11.1	Einleitung . . . . .	111
11.2	Herstellung und Struktur von Kunststoffen . . . . .	112
11.2.1	Polymerisation . . . . .	112
11.2.2	Polykondensation, Polyaddition . . . . .	114
11.2.3	Bindung und Struktur des Polymermoleküls . . . . .	114
11.3	Thermomechanisches Verhalten . . . . .	115
11.4	Zeiteinflüsse auf das mechanische Verhalten . . . . .	119
11.5	Anwendungsbeispiele . . . . .	123
12	Literatur . . . . .	131

### Werkstoffmechanik

1	Einführung . . . . .	133
2	Grundbegriffe . . . . .	133
2.1	Spannung . . . . .	133
2.2	Verzerrung . . . . .	137
2.3	Klassifizierung des Werkstoffverhaltens . . . . .	139
3	Elastizität . . . . .	140
3.1	Linear elastisches Material . . . . .	140
3.1.1	Verallgemeinertes Hookesches Gesetz . . . . .	140
3.1.2	Isotropie . . . . .	141
3.1.3	Orthotropie, Transversale Isotropie . . . . .	143
3.2	Nichtlinear elastisches Material . . . . .	144
4	Viskoelastizität . . . . .	145
4.1	Allgemeines . . . . .	145
4.2	Viskose Newtonsche Flüssigkeit . . . . .	146
4.3	Materialmodelle . . . . .	147
4.4	Stoffgesetz der Viskoelastizität . . . . .	149
4.5	Elastisch-viskoelastische Analogie . . . . .	150
4.6	Elastische Näherung . . . . .	151
5	Plastizität . . . . .	151
5.1	Allgemeines . . . . .	151
5.2	Einfache Materialmodelle . . . . .	152
5.3	Stoffgesetz der Plastizität . . . . .	153
5.3.1	Fließbedingung . . . . .	153
5.3.2	Fließregel . . . . .	155
6	Werkstoffversagen, Bruch . . . . .	156
6.1	Grundbegriffe . . . . .	156
6.2	Festigkeitshypothesen . . . . .	158
6.2.1	Hauptspannungshypothese . . . . .	158
6.2.2	Hauptdehnungshypothese . . . . .	159
6.2.3	Formänderungsenergiehypothese . . . . .	159
6.2.4	Coulomb-Mohr-Hypothese . . . . .	159
6.3	Elemente der Bruchmechanik . . . . .	160
6.3.1	Allgemeines . . . . .	160
6.3.2	K-Konzept . . . . .	161

**Elastizitätstheorie**

1	Einleitung . . . . .	165
1.1	Übersicht . . . . .	165
1.2	Bemerkungen zur historischen Entwicklung der Kontinuumsmechanik fester Körper . . . . .	167
1.3	Grundlagen der Kontinuumsmechanik fester Körper . . . . .	168
1.3.1	Der materielle Körper und seine Eigenschaften . . . . .	168
1.3.2	Die Beschreibung der Lage und Bewegung des materiellen Körpers . . . . .	169
1.3.3	Die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik . . . . .	170
1.3.4	Die konstitutiven Gleichungen . . . . .	170
1.3.5	Das Aufgabengebiet der Elastizitätstheorie . . . . .	171
1.3.6	Die mathematische Behandlung der Elastizitätstheorie . . . . .	171
1.3.7	Einführung in die Finite-Elemente-Methode . . . . .	172
2	Lage und Bewegung des materiellen Körpers . . . . .	172
2.1	Grundlagen . . . . .	172
2.1.1	Die deterministische Theorie . . . . .	172
2.1.2	Die mathematische Beschreibung der physikalischen Ereignisse . . . . .	172
2.1.2.1	Die Beschreibung des Anschauungsraumes $\mathcal{E}_t$ . . . . .	173
2.1.2.2	Die Beschreibung des Raumes $\mathcal{T}$ der betrachteten Zeitpunkte . . . . .	174
2.1.2.3	Die Einführung des Beobachters $\Sigma$ . . . . .	174
2.1.2.4	Vereinbarungen und Bezeichnungen . . . . .	174
2.2	Beschreibung der Lage des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ in Abhängigkeit der materiellen Punkte $\mathcal{M}$ . . . . .	175
2.3	Veranschaulichung der mathematischen Forderungen . . . . .	176
2.3.1	Injektivität, Surjektivität und Bijektivität der Abbildung $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . . . . .	176
2.3.2	Stetigkeit der Abbildung $\chi_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . . . . .	178
2.3.3	Stetigkeit der Abbildung $\chi_{t,\#}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . . . . .	179
2.4	Einführung der Referenzkonfiguration $\mathcal{B}_0$ . . . . .	179
2.5	Betrachtungsweisen der Bewegung des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ . . . . .	181
2.5.1	Darstellung der Bewegung in Abhängigkeit der materiellen Punkte $\mathcal{M}$ . . . . .	182
2.5.2	Die materielle oder Lagrangesche Betrachtungsweise . . . . .	182
2.5.3	Die räumliche oder Eulersche Betrachtungsweise . . . . .	183
2.5.4	Die relative Beschreibung der Bewegung . . . . .	183
2.6	Bemerkungen zum Wechsel des Beobachters . . . . .	184
2.7	Bemerkungen zum Wechsel der Referenzkonfiguration . . . . .	186
2.8	Bemerkungen zum Wechsel des Koordinatensystems . . . . .	187
3	Deformationen und Verzerrungen . . . . .	188
3.1	Grundlagen und Vereinbarungen . . . . .	189
3.2	Der materielle Deformationsgradient $F$ . . . . .	191
3.3	Multiplikative oder polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten $F$ . . . . .	193
3.4	Der Greensche Verzerrungstensor $E$ . . . . .	195
3.4.1	Anschauliche Einführung des Greenschen Verzerrungstensors $E$ . . . . .	195
3.4.2	Herleitung des Greenschen Verzerrungstensors $E$ mit Hilfe der Differenz der Quadrate der Linienelemente im verformten und unverformten Zustand . . . . .	197
3.4.3	Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors $E$ in konvektiven Koordinaten durch die Differenz der Metriktensoren in der Momentan- und der Referenzkonfiguration . . . . .	198

3.4.4	Darstellung des Greenschen Verzerrungstensors $E$ mit Hilfe des materiellen Verschiebungsgradienten $H$ . . . . .	200
3.4.5	Vergleich des Greenschen Verzerrungstensors $E$ mit den Ingenieurverzerrungen $\gamma$ . . . . .	201
3.5	Der Almansische Verzerrungstensor $E^{(A)}$ . . . . .	203
3.6	Hauptachsentransformation der Verzerrungstensenoren . . . . .	204
3.6.1	Hauptachsentransformation des Rechts-Streck-Tensors $U$ . . . . .	205
3.6.2	Hauptachsentransformation des Links-Streck-Tensors $V$ . . . . .	206
3.6.3	Spektraldarstellung der Verzerrungstensenoren . . . . .	206
3.6.4	Einführung weiterer Verzerrungstensenoren . . . . .	207
3.6.5	Das Cauchysche Dehnungsellipsoid . . . . .	207
3.7	Multiplikative Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten in volumetrische und isochore Anteile . . . . .	209
3.8	Additive Aufspaltung des Greenschen Verzerrungstensors $E$ in Kugeltensor $E^K$ und Deviator $E^D$ . . . . .	210
3.9	Verträglichkeitsbedingungen für die linearen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen . . . . .	211
3.10	Transformation geometrischer Größen von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration . . . . .	213
3.10.1	Pull-Back und Push-Forward-Operationen . . . . .	213
3.10.2	Transformation der Linienelemente . . . . .	214
3.10.3	Transformation der Volumenelemente . . . . .	215
3.10.4	Transformation der Flächenelemente . . . . .	216
4	Zeitliche Ableitungen . . . . .	216
4.1	Materielle Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen . . . . .	216
4.1.1	Materielle Darstellung der materiellen Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen . . . . .	217
4.1.2	Räumliche Darstellung der materiellen Zeitableitung skalarwertiger Vektorfunktionen . . . . .	217
4.2	Materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen . . . . .	218
4.2.1	Materielle Darstellung der materiellen Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen . . . . .	218
4.2.2	Räumliche Darstellung der materiellen Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen . . . . .	218
4.2.3	Beispiel für die materielle Zeitableitung vektorwertiger Vektorfunktionen . . . . .	219
4.3	Materielle Zeitableitung geometrischer Größen . . . . .	219
4.3.1	Die materielle Zeitableitung des Linienelementes $dx$ . . . . .	220
4.3.2	Die materielle Zeitableitung der Jacobi-Determinante $\det F$ . . . . .	220
4.3.3	Die zeitliche Ableitung des Volumenelementes $dv$ . . . . .	222
4.3.4	Die zeitliche Ableitung des Oberflächenelementes $da$ . . . . .	222
4.4	Transformationsbeziehungen beim Wechsel des Beobachters – Beobachterinvarianz physikalischer Größen . . . . .	222
4.5	Untersuchung der Beobachterinvarianz zeitlicher Ableitungen . . . . .	225
4.5.1	Untersuchung der Objektivität der Geschwindigkeit $v(x, t)$ . . . . .	225
4.5.2	Untersuchung der Objektivität der Beschleunigung $a(x, t)$ . . . . .	226
5	Die Bilanz- und Erhaltungssätze der Mechanik . . . . .	227
5.1	Satz von der Erhaltung der Masse . . . . .	227
5.2	Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße . . . . .	229
5.2.1	Räumliche Darstellung . . . . .	229
5.2.2	Materielle Darstellung . . . . .	231

5.3	Einführung mechanischer Spannungen . . . . .	231
5.3.1	Einführung des Spannungsvektors $t$ und des Cauchyschen Spannungstensors $T$ in der Momentankonfiguration $B_t$ . . . . .	232
5.3.1.1	Einführung des Spannungsvektors $t$ . . . . .	232
5.3.1.2	Das Cauchy-Postulat . . . . .	232
5.3.1.3	Das Cauchy-Fundamentallemma . . . . .	233
5.3.1.4	Das Cauchy-Theorem . . . . .	234
5.3.2	Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Momentankonfiguration . . . . .	237
5.3.2.1	Herleitung der dynamischen Feldgleichungen . . . . .	237
5.3.2.2	Indexschreibweise der dynamischen Feldgleichungen . . . . .	238
5.3.3	Materielle Darstellung des Spannungsvektors $t$ und des Cauchyschen Spannungstensors $T$ in der Referenzkonfiguration $B_0$ . . . . .	239
5.3.3.1	Transformation der eingepprägten Volumenkraftdichte $\bar{b}$ . . . . .	239
5.3.3.2	Transformation der eingepprägten Oberflächenkraftdichte $\bar{t}(x, t, n)$ . . . . .	240
5.3.3.3	Transformation des Spannungsvektors $t(x, t, n)$ und Einführung der Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren . . . . .	240
5.3.4	Darstellung der dynamischen Feldgleichungen in der Referenzkonfiguration . . . . .	242
5.4	Der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses . . . . .	242
5.4.1	Räumliche Darstellung . . . . .	243
5.4.2	Materielle Betrachtungsweise . . . . .	245
5.4.2.1	Betrachtung des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors $P$ . . . . .	246
5.4.2.2	Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors $S$ . . . . .	246
5.5	Der Bilanzsatz der kinetischen Energie . . . . .	246
5.5.1	Herleitung des Bilanzsatzes der kinetischen Energie . . . . .	246
5.5.2	Einführung der Elementarleistung und arbeitskonformer Paarungen von Spannungs- und Verzerrungstensoren . . . . .	248
5.6	Der Energieerhaltungssatz . . . . .	251
5.6.1	Der Erhaltungssatz der gesamten mechanischen und thermischen Energie . . . . .	251
5.6.2	Die lokale Formulierung des Energieerhaltungssatzes . . . . .	252
5.7	Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	253
5.8	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	254
6	Zusammenstellung und Linearisierung der stoffunabhängigen Gleichungen . . . . .	257
6.1	Zusammenstellung der stoffunabhängigen Gleichungen . . . . .	258
6.2	Mathematische Grundlagen der Linearisierung . . . . .	259
6.2.1	Linearisierung reellwertiger Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	259
6.2.2	Linearisierung skalarwertiger Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	260
6.2.3	Linearisierung vektor- und tensorwertiger Funktionen . . . . .	261
6.3	Linearisierung der stoffunabhängigen Gleichungen . . . . .	261
6.3.1	Linearisierung der kinematischen Beziehungen . . . . .	262
6.3.1.1	Linearisierung des materiellen Deformationsgradienten . . . . .	262
6.3.1.2	Linearisierung des räumlichen Deformationsgradienten . . . . .	262
6.3.1.3	Linearisierung des Greenschen Verzerrungstensors . . . . .	263
6.3.1.4	Linearisierung des Almansischen Verzerrungstensors . . . . .	263
6.3.1.5	Linearisierung der Determinante des materiellen Deformationsgradienten . . . . .	264
6.3.1.6	Linearisierung der polaren Zerlegung . . . . .	265
6.3.2	Linearisierung der Spannungstensoren . . . . .	267
6.3.3	Linearisierung der Feldgleichungen . . . . .	268

7	Die konstitutiven Gleichungen elastischer Materialien . . . . .	269
7.1	Allgemeines . . . . .	269
7.2	Allgemeingültige Prinzipien zur Aufstellung von Materialgleichungen . . .	270
7.3	Die Definition des elastischen Materials . . . . .	274
7.3.1	Der Übergang von der allgemeinen Materialtheorie zum elastischen Material . . . . .	274
7.3.2	Das Hookesche Werkstoffgesetz . . . . .	276
7.4	Folgerungen aus dem Potentialcharakter der Formänderungsenergie . . .	277
7.4.1	Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse . . . . .	277
7.4.2	Darstellung der Spannungstensoren aus der Formänderungsenergiefunktion	279
7.4.3	Herleitung der Materialtensoren . . . . .	280
7.4.4	Folgerungen für den Materialtensor aus dem Potentialcharakter der Formänderungsenergie . . . . .	281
7.5	Das Prinzip der materiellen Objektivität und die Auswirkungen auf die Darstellungsformen der konstitutiven Gleichungen elastischer Materialien	281
7.6	Die Materialgleichungen isotroper elastischer Materialien . . . . .	284
7.6.1	Der Einfluß der Referenzkonfiguration auf den Deformationsgradienten .	284
7.6.2	Das Prinzip der materiellen Symmetrie . . . . .	285
7.6.3	Das Materialgesetz homogener, isotroper, elastischer Materialien . . . . .	287
7.6.4	Die Formänderungsenergiefunktion eines homogenen, isotropen, hyperelastischen Materials . . . . .	288
7.7	Das Verhalten der konstitutiven Gleichungen in der Umgebung der Referenzkonfiguration . . . . .	289
7.8	Das St. Venant-Kirchhoff-Material als Beispiel einer linearen elastischen Materialgleichung . . . . .	291
7.9	Das Hookesche Werkstoffgesetz . . . . .	293
7.9.1	Herleitung des Hookeschen Werkstoffgesetzes . . . . .	293
7.9.2	Bestimmung der Lamé-Parameter $\lambda$ und $\mu$ . . . . .	295
7.9.3	Das Hookesche Werkstoffgesetz in Matrixschreibweise . . . . .	300
7.9.4	Das Hookesche Werkstoffgesetz für den ebenen Spannungszustand . . . . .	302
7.9.5	Das Hookesche Werkstoffgesetz für den ebenen Verzerrungszustand . . .	303
7.9.6	Das Hookesche Werkstoffgesetz für den geraden Stab . . . . .	304
7.10	Beispiele nichtlinear-elastischer Materialien . . . . .	305
7.10.1	Allgemeingültige Darstellung der Formänderungsenergie für homogene, isotrope, hyperelastische Materialien . . . . .	305
7.10.2	Das Ogden-Material . . . . .	306
7.10.3	Das Neo-Hooke-Material . . . . .	307
7.10.4	Das Mooney-Rivlin-Material . . . . .	307
7.10.5	Ein Vergleich verschiedener Materialmodelle . . . . .	307
7.11	Hauptspannungen und Hauptachsen des Spannungstensors . . . . .	308
7.11.1	Hauptachsenproblem des Cauchyschen Spannungstensors . . . . .	308
7.11.2	Das Hauptachsenproblem des ebenen Spannungszustandes . . . . .	309
7.11.3	Additive Aufspaltung des Spannungstensors in Kugeltensor und Deviator	310
8	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie . . . . .	311
8.1	Zusammenstellung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie . . . . .	311
8.1.1	Die geometrischen Beziehungen . . . . .	311
8.1.2	Die dynamischen und statischen Feldgleichungen . . . . .	311
8.1.3	Die geometrischen und statischen Randbedingungen . . . . .	312
8.1.4	Das Werkstoffgesetz eines homogenen, isotropen, elastischen Materials . .	312
8.1.5	Das Randwertproblem der Elastizitätstheorie . . . . .	313



8.2	Linearisierung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie . . . . .	313
8.2.1	Die Grundgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie . . . . .	313
8.2.2	Das Superpositionsprinzip der Lösungen der klassischen Elastizitätstheorie . . . . .	314
8.3	Die Herleitung der Lamé-Navierschen Verschiebungs- differentialgleichungen der klassischen linearen Elastizitätstheorie . . . . .	315
8.3.1	Herleitung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen . .	315
8.3.2	Darstellung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in den Koeffizienten verschiedener Basissysteme . . . . .	316
8.3.2.1	Die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in krümmmlinigen Koordinaten . . . . .	316
8.3.2.2	Die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in kartesischen Koordinaten . . . . .	316
8.3.3	Darstellung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen in Matrixform . . . . .	319
8.4	Erweiterung der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen für stationäre thermoelastische Probleme . . . . .	322
8.5	Biharmonische Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten	323
8.6	Biharmonische Differentialgleichung für die Spannungskomponenten . . .	324
8.7	Die Maxwell'schen Spannungsfunktionen . . . . .	326
8.7.1	Einführung der Spannungsfunktionen zur Erfüllung der homogenen Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	327
8.7.2	Herleitung der Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion . . . . .	328
8.7.3	Darstellung der Maxwell'schen Spannungsfunktion für die Scheibe . . . . .	329
8.8	Die Eigenschaften der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie . . .	330
8.8.1	Ein kleiner Exkurs in die Theorie der Differentialgleichungen . . . . .	331
8.8.2	Die Poissonsche Differentialgleichung . . . . .	333
8.8.3	Die Differentialgleichung der schwingenden Saite . . . . .	333
8.8.4	Die Elliptizität der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie . . . . .	335
8.8.5	Die Elliptizität der Differentialgleichungen der Membranschale . . . . .	337
8.8.6	Das Prinzip von St. Venant . . . . .	338
8.9	Das TONTI-Schema . . . . .	341
9	Lösungen der Grundgleichungen der klassischen linearen Elastizitätstheorie . . . . .	343
9.1	Der Drei-Funktionen-Ansatz nach Papkovitsch-Neuber . . . . .	344
9.1.1	Herleitung des Drei-Funktionen-Ansatzes . . . . .	344
9.1.1.1	Definition des Drei-Funktionen-Ansatzes . . . . .	344
9.1.1.2	Bestimmung der Ansatzkonstanten $\alpha$ . . . . .	344
9.1.1.3	Bestimmung der Spannungen aus dem Drei-Funktionen-Ansatz . . . . .	345
9.1.2	Die Spannungsfunktion des Drei-Funktionen-Ansatzes für den ebenen Verzerrungszustand . . . . .	346
9.1.3	Die Spannungsfunktion des Drei-Funktionen-Ansatzes für den ebenen Spannungszustand . . . . .	348
9.2	Die direkte Herleitung der Scheibentheorie . . . . .	350
9.3	Lösungsfunktionen der Bipotentialgleichungen . . . . .	351
9.3.1	Bipotentialgleichungen in Zylinderkoordinaten für achsensymmetrische Probleme . . . . .	351
9.3.2	Ebener Spannungszustand in Polarkoordinaten . . . . .	353
9.3.3	Ebener Spannungszustand in kartesischen Koordinaten . . . . .	354
9.4	Die elastische Halbebene unter Wirkung einer Einzellast . . . . .	355

9.5	Der elastische Halbraum unter Wirkung einer Einzellast . . . . .	358
9.6	Die Scheibe mit Loch unter einachsigen Zug . . . . .	364
10	Arbeits- und Extremalprinzipien . . . . .	368
10.1	Das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit in der Starrkörperdynamik	368
10.2	Das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit in der Elastodynamik	370
10.3	Das Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit . . . . .	372
10.4	Ein kleiner Exkurs in die Variationsrechnung . . . . .	373
10.5	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie . . . . .	378
10.5.1	Einführung eines Stoffgesetzes mit Potentialeigenschaft . . . . .	378
10.5.2	Einführung von äußeren Kräften mit Potentialcharakter . . . . .	380
10.5.3	Herleitung des Prinzips der stationären potentiellen Energie . . . . .	380
10.5.4	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie für die klassische lineare Elastizitätstheorie . . . . .	382
10.5.5	Das Dirichletsche Prinzip in Matrizenform . . . . .	385
10.6	Folgerungen aus den Arbeits- und Energieprinzipien . . . . .	385
10.6.1	Der Satz von Clapeyron . . . . .	385
10.6.2	Der Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz . . . . .	386
10.6.3	Die Sätze von Betti und Maxwell . . . . .	387
10.6.4	Zusammenstellung der Sätze von Castigliano, Engesser und Menabrea aus der Festigkeitslehre . . . . .	388
10.6.4.1	Der 2. Satz von Castigliano . . . . .	389
10.6.4.2	Der 1. Satz von Engesser . . . . .	390
10.6.4.3	Der 1. Satz von Castigliano . . . . .	391
10.6.4.4	Der 2. Satz von Engesser . . . . .	392
10.6.4.5	Der Satz von Menabrea . . . . .	392
10.6.5	Über die Gültigkeit der Sätze von Castigliano, Engesser und Menabrea für verschiedene elastische Strukturen	393
10.7	Die Herstellung der Differentialgleichung der Platte durch Variation des elastischen Potentials . . . . .	396
10.7.1	Die Herleitung des elastischen Potentials der Platte . . . . .	396
10.7.2	Die Behandlung des Variationsproblems . . . . .	398
11	Die mathematische Behandlung der linearisierten Elastizitätstheorie . . . .	399
11.1	Zusammenstellung der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie . . . .	400
11.1.1	Das Randwertproblem der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie . .	400
11.1.2	Das Energieprinzip der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie . . . .	401
11.1.3	Existenz und Eindeutigkeit in der klassischen linearisierten Elastizitätstheorie . . . . .	401
11.2	Die schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	402
11.3	Variationsaufgaben . . . . .	404
11.3.1	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Variationsaufgaben . . . . .	404
11.3.2	Beziehung der schwachen Form zu Minimalproblemen . . . . .	406
11.3.3	Die Regularität der Lösung . . . . .	407
11.4	Lösung der schwachen Form des Gleichgewichts . . . . .	407
11.4.1	Die Wahl des geeigneten Hilbertraumes $V$ . . . . .	408
11.4.2	Die $V$ -Elliptizität der Bilinearform . . . . .	409
12	Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM) . . . . .	410
12.1	Vorbemerkungen . . . . .	410
12.2	Ingenieurmäßige Darstellung der linearen FEM mit Verschiebungsansätzen in Matrixschreibweise . . . . .	412
12.2.1	Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	412

12.2.2	Potentialeigenschaften der inneren und äußeren Kräfte . . . . .	413
12.2.3	Direkte Darstellung des Dirichletprinzips . . . . .	414
12.2.4	Einführung von Finite-Element-Ansätzen für zweidimensionale Gebiete . . . . .	415
12.2.5	Darstellung der Element-Steifigkeitsmatrizen . . . . .	416
12.2.6	Einführung globaler Knotenverschiebungsvektoren . . . . .	416
12.3	Kontrollierte Genauigkeit und Effizienz der Finite-Element-Methode durch Netz- und Modelladaption . . . . .	417
12.3.1	Heutige Aspekte der Finite-Element-Methode . . . . .	417
12.3.1.1	Finite-Elemente-Methode . . . . .	418
12.3.1.2	Das Genauigkeitsproblem . . . . .	418
12.3.2	A posteriori Fehlerschätzer und Fehlerindikatoren . . . . .	419
12.3.2.1	Der residuale Fehlerschätzer nach Babuška-Miller . . . . .	420
12.3.2.2	Der residuale Fehlerschätzer nach Johnson und Hansbo . . . . .	421
12.3.2.3	Strategie bei der Verdichtung und Abbruchkriterien . . . . .	421
12.3.2.4	Fehlerbetrachtungen am Beispiel einer Kragsscheibe . . . . .	422
12.3.3	Dimensions- und Modelladaptivität . . . . .	423
12.3.3.1	Dimensionsadaptivität an einer gevouteten Platte . . . . .	424
13	Literatur . . . . .	425
<b>Stichwortverzeichnis . . . . .</b>		<b>429</b>