

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logisch-mathematische Untersuchung
über den Begriff der Zahl

1990

Georg Olms Verlag

Hildesheim · Zürich · New York



Inhalt.

	Seite
§ 1. In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf der Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar.	1
§ 2. Die Prüfung muss sich schliesslich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises.	2
§ 3. Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, apriori oder aposteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke.	3
§ 4. Die Aufgabe dieses Buches.	4

I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze.

Sind die Zahlformeln beweisbar?

§ 5. Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt.	5
§ 6. Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Grassmanns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft.	7
§ 7. Mills Meinung, dass die Definitionen der einzelnen Zahlen beobachtete Thatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet.	9
§ 8. Zur Rechtmässigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Thatsachen nicht erforderlich.	11

**Sind die Gesetze der Arithmetik inductive
Wahrheiten?**

- | | | |
|-------|--|----|
| § 9. | Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen. | 12 |
| § 10. | Gründe dagegen, dass die Additionsgesetze inductive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induction ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen. | 14 |
| § 11. | Leibnizens „Eingeboren“. | 17 |

**Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch-apriori
oder analytisch?**

- | | | |
|-------|--|----|
| § 12. | Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnisgrund. | 17 |
| § 13. | Unterschied von Arithmetik und Geometrie | 19 |
| § 14. | Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet | 20 |
| § 15. | Ansichten von Leibniz und St. Jevons | 21 |
| § 16. | Dagegen Mills Herabsetzung des „kunstfertigen Handhabens der Sprache.“ Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten | 22 |
| § 17. | Unzulänglichkeit der Induction. Vermuthung, dass die Zahlgesetze analytische Urtheile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Werthschätzung der analytischen Urtheile. . . | 23 |

**II. Meinungen einiger Schriftsteller über den
Begriff der Anzahl.**

- | | | |
|-------|---|----|
| § 18. | Nothwendigkeit den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen. | 24 |
| § 19. | Die Definition darf nicht geometrisch sein. | 25 |
| § 20. | Ist die Zahl definirbar? Hankel. Leibniz. | 26 |

**Ist die Anzahl eine Eigenschaft der
äussern Dinge?**

- | | | |
|-------|---|----|
| § 21. | Meinungen von M. Cantor und E. Schröder | 27 |
| § 22. | Dagegen Baumann: die äussern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab | 28 |
| § 23. | Mills Meinung, dass die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar | 29 |

- § 24. Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden 30
- § 25. Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen 32
- Ist die Zahl etwas Subjectives?
- § 26. Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung passt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objectives 33
- § 27. Die Zahl ist nicht, wie Schloemilch will, Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe 36
- Die Anzahl als Menge.
- § 28. Thomaes Namengebung 38

III. Meinungen über Einheit und Eins.

Drückt das Zahlwort „Ein“ eine Eigenschaft von Gegenständen aus?

- § 29. Vieldeutigkeit der Ausdrücke „μονάς“ und „Einheit.“ E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjectiv „Ein“ enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Praedicat dienen 39
- § 30. Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen 41
- § 31. Baumanns Merkmale der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objecte zugeführt (Locke) 41
- § 32. Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird 42
- § 33. Die Untheilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar 43
- Sind die Einheiten einander gleich?
- § 34. Die Gleichheit als Grund für den Namen „Einheit.“ E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraction von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich 44

	Seite
§ 35. Die Verschiedenheit ist sogar nothwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E Schröder. St. Jevons	46
§ 36. Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stösst auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons	46
§ 37. Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins	48
§ 38. „Eins“ ist Eigennamen, „Einheit“ Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definiert werden. Unterschied von „und“ und +	46
§ 39. Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von „Einheit“ verdeckt	50

Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden.

§ 40. Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons	51
§ 41. Der Zweck wird nicht erreicht	53
§ 42. Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen	54
§ 43. Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1	51
§ 44. Jevons Abstrahiren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1 sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen	55

Lösung der Schwierigkeit.

§ 45. Rückblick	58
§ 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere	59
§ 47. Die Thatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objectivität des Begriffes	60
§ 48. Auflösung einiger Schwierigkeiten	61
§ 49. Bestätigung bei Spinoza	62
§ 50. E. Schröders Ausführung	63
§ 51. Berichtigung derselben	63
§ 52. Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche	64
§ 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl	64
§ 54. Einheit kann man das Subject einer Zahlangabe nennen. Untheilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit	65

IV. Der Begriff der Anzahl.

Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand.

§ 55. Versuch, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen	67
§ 56. Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Theil ist	67
§ 57. Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen	68
§ 58. Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar	69
§ 59. Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschliessen, weil er unvorstellbar ist	70
§ 60. Selbst concrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muss die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt	71
§ 61. Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objective Gegenstand ist räumlich	72

Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen.

§ 62. Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit	73
§ 63. Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches. Logisches Bedenken, dass die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird	73
§ 64. Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Richtung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks	74
§ 65. Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird	76
§ 66. Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend	77
§ 67. Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, dass man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist	78
§ 68. Die Anzahl als Umfang eines Begriffes	79
§ 69. Erläuterung	80

Ergänzung und Bewährung unserer Definition.

§ 70. Der Beziehungsbegriff	81
§ 71. Die Zuordnung durch eine Beziehung	83
§ 72. Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl	84

	Seite
§ 73. Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung giebt, welche die unter F fallenden Gegenstände, den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet . . .	85
§ 74. Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich“ zukommt	86
§ 75. Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist	88
§ 76. Erklärung des Ausdrucks „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m.“	89
§ 77. 1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt	90
§ 78. Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind	91
§ 79. Definition des Folgens in einer Reihe	92
§ 80. Bemerkungen hierzu. Objectivität des Folgens	92
§ 81. Erklärung des Ausdrucks „x gehört der mit y endenden φ -Reihe an“	94
§ 82. Andeutung des Beweises, dass es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe giebt	94
§ 83. Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber . . .	95

Unendliche Anzahlen.

§ 84. Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl“ zukommt, ist eine unendliche	96
§ 85. Die cantorsche unendlichen Anzahlen; „Mächtigkeit“. Abweichung in der Benennung	97
§ 86. Cantors Folgen in der Succession und mein Folgen in der Reihe	98

V. Schluss.

§ 87. Die Natur der arithmetischen Gesetze	99
§ 88. Kants Unterschätzung der analytischen Urtheile	99
§ 89. Kants Satz: „Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden“. Kants Verdienst um die Mathematik	101
§ 90. Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlusskette	102
§ 91. Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich	103

Andere Zahlen.

§ 92. Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel	104
§ 93. Die Zahlen sind weder räumlich ausser uns noch subjectiv	105

	Seite
§ 94. Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes verbürgt nicht, dass etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises . . .	105
§ 95. Man darf nicht ohne Weiteres ($c - b$) als ein Zeichen ansehen, das die Subtractionsaufgabe löst	106
§ 96. Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen	107
§ 97. Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden . . .	108
§ 98. Hankels Erklärung der Addition	108
§ 99. Mangelhaftigkeit der formalen Theorie	109
§ 100. Versuch, complexe Zahlen dadurch nachzuweisen, dass die Bedeutung der Multiplication in besonderer Weise erweitert wird	110
§ 101. Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig	111
§ 102. Die blosse Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung	111
§ 103. Kossaks Erklärung der complexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung . . .	112
§ 104. Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für die neuen Zahlen festzusetzen	114
§ 105. Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter	115
§ 106—109. Rückblick	115—119