

A β -Z.

Mathematischer Einführungskurs für die Physik

Von Dr. rer. nat. Siegfried Großmann
Professor an der Universität Marburg

7, durchgesehene Auflage
Mit 121 Figuren, über 100 Beispielen
und 209 Selbsttests mit Lösungen



B.G.Teubner Stuttgart 1993

Inhalt

1. Vektoren

1.1. Definition von Vektoren	13
1.1.1. Skalare	13
1.1.2. Vektoren	13
1.1.2.1. Vorläufiges. 1.1.2.2. Bezugssysteme. 1.1.2.3. Komponenten. 1.1.2.4. Koordinatentransformationen. 1.1.2.5. Vektordefinition	
1.1.3. Tensoren	19
1.2. Addition von Vektoren und Multiplikation mit Zahlen.	22
1.2.1. Addieren und Subtrahieren	22
1.2.2. Übungen zum Selbsttest: Vektoraddition.	24
1.2.3. Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	25
1.2.4. Komponentendarstellung der Vektoren.	26
1.2.4.1. Einheitsvektoren. 1.2.4.2. Komponenten. 1.2.4.3. Umrechnung zwischen Komponenten- und Pfeildarstellung	
1.2.5. Rechenregeln in Komponentendarstellung	30
1.2.5.1. Addition und Subtraktion. 1.2.5.2. Multiplikation mit Zahlen. 1.2.5.3. Beispiele zur üben Erläuterung	
1.2.6. Übungen zum Selbsttest: Vektoralgebra	32
1.3. Das Innere Produkt von Vektoren.	33
1.3.1. Definition.	33
1.3.2. Eigenschaften des Inneren Produktes.	34
1.3.3. Beispiele zur üben Erläuterung	37
1.3.4. Algebraische Definition des Vektorraumes.	39
1.3.5. Übungen zum Selbsttest: Inneres Produkt	40
1.4. Koordinatentransformationen.	40
1.4.1. Die Transformationsmatrix.	40
1.4.1.1. Beschreibung einer Koordinatendrehung. 1.4.1.2. Zuordnung von Drehungen und Matrizen. 1.4.1.3. Die Determinante der Drehmatrix	
1.4.2. Die Transformationsformeln für Vektoren	44
1.4.3. Beispiele zu üben Erläuterung	46
1.4.4. Die Transformationsformeln für Tensoren.	47
1.4.5. Übungen zum Selbsttest: Koordinatentransformationen	48
1.5. Matrizen	49
1.5.1. Definitionen.	49
1.5.2. Multiplikation von Matrizen	51
1.5.3. Inverse Matrizen.	53
1.5.4. Matrizen — Tensoren - Transformationen.	56

1.5.5. Beispiele zur übenen Erläuterung	56
1.5.6. Übungen zum Selbsttest: Matrizen.	58
1.6. Determinanten.	59
1.6.1. Definition.	59
1.6.2. Eigenschaften von Determinanten.	62
1.6.3. Beispiele zur übenen Erläuterung	64
1.6.4. Übungen zum Selbsttest: Determinanten.	67
1.7. Das Äußere Produkt von Vektoren.	68
1.7.1. Definition.	68
1.7.2. Eigenschaften des Äußeren Produktes.	69
1.7.3. Komponentendarstellung des Äußeren Produktes, Transformationsverhalten.	71
1.7.4. Beispiele zur übenen Erläuterung.	73
1.7.5. Übungen zum Selbsttest: Äußeres Produkt.	76
1.8. Mehrfache Vektorprodukte.	76
1.8.1. Grundregeln.	76
1.8.2. Spatprodukt dreier Vektoren.	77
1.8.3. Entwicklungssatz für 3-fache Vektorprodukte.	78
1.8.4. n-fache Produkte.	79
1.8.5. Beispiele zur übenen Erläuterung.	79
1.8.6. Übungen zum Selbsttest: Mehrfachprodukte.	80
2. Vektorfunktionen	
2.1. Vektorwertige Funktionen.	82
2.1.1. Definition.	82
2.1.2. Parameterdarstellung von Raumkurven.	83
2.2. Ableitung vektorwertiger Funktionen.	85
2.2.1. Definition der Ableitung.	85
2.2.2. Beispiele zur übenen Erläuterung.	86
2.2.3. Rechenregeln für die Vektordifferentiation.	87
2.2.4. Übungen zum Selbsttest: Ableitung von Vektoren.	88
2.3. Raumkurven.	88
2.3.1. Bogenmaß und Tangenten-Einheitsvektor.	89
2.3.2. Die Normale.	89
2.3.3. Die Binormale.	91
2.3.4. Frenetsche Formeln für das begleitende Dreibein.	91
2.3.5. Beispiele zur übenen Erläuterung.	92
2.3.6. Übungen zum Selbsttest: Raumkurven.	93
3. Felder	
3.1. Physikalische Felder.	94

- 3.1.1. Allgemeine Definition 94
- 3.1.2. Skalare Felder. 95
- 3.1.3. Vektor-Felder. 97
- 3.1.4. Übungen zum Selbsttest: Darstellung von Feldern. **100**
- 3.2. Partielle Ableitungen 100
 - 3.2.1. Definition der partiellen Ableitung. 100
 - 3.2.2. Beispiele - Rechenregeln - Übungen. 102
 - 3.2.3. Die Kettenregel 105
 - 3.2.4. Übungen zum Selbsttest: Partielle Ableitungen. 106
- 3.3. Gradient 106
 - 3.3.1. Richtungsableitung 106
 - 3.3.2. Definition des Gradienten 108
 - 3.3.3. Interpretation und Rechenregeln. 109
 - 3.3.4. Beispiele zur üben Erläuterung. HO
 - 3.3.5. Taylorentwicklung für Felder. 111
 - 3.3.6. Übungen zum Selbsttest: Der Gradient 114
- 3.4. Divergenz 115
 - 3.4.1. Definition der Divergenz von Vektorfeldern 115
 - 3.4.2. Beispiele und Rechenregeln. 116
 - 3.4.3. Interpretation als lokale Quellstärke. 117
 - 3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Die Divergenz. 119
- 3.5. Rotation 120
 - 3.5.1. Definition der Rotation von Vektorfeldern. 120
 - 3.5.2. Interpretation als lokale Wirbelstärke. 121
 - 3.5.3. Eigenschaften und Rechenregeln der Operation rot 122
 - 3.5.4. Beispiele zur üben Erläuterung. 123
 - 3.5.5. Übungen zum Selbsttest: Die Rotation. 124
- 3.6. Der Vektor-Differentialoperator ∇ (Nabla). 125
 - 3.6.1 Formale Zusammenfassung der Vektor-Differentialoperationen durch ∇ 125
 - 3.6.2. Zusammenfassende Übersicht der Eigenschaften von ∇ 126
 - 3.6.3. Übungen zum Selbsttest: Der Nabla-Operator. 127

4. Integration

- 4.1. Physikalische Motivation 128
- 4.2. Das Integral über Funktionen 134
 - 4.2.1. Definition des (bestimmten) Riemann-Integrals. 134
 - 4.2.2. Eigenschaften des bestimmten Integrals. 136
 - 4.2.3. Übungen zum Selbsttest: Riemannsummen. 138
 - 4.2.4. Das unbestimmte Integral 139
 - 4.2.5. Einfache Integraltabelle. 142
 - 4.2.6. Übungen zum Selbsttest: Integrale. 143

4.3. Methoden zur Berechnung von Integralen143
4.3.1. Substitution143
4.3.2. Partielle Integration145
4.3.3. Übungen zum Selbsttest: Substitution, partielle Integration147
4.3.4. Integral-Funktionen148
4.3.5. Numerische Bestimmung von Integralen148
4.4. Uneigentliche Integrale149
4.4.1. Definition uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen150
4.4.2. Beispiele zur übenenden Erläuterung151
4.4.3. Singuläre Integranden152
4.4.4. Beispiele zur übenenden Erläuterung154
4.4.5. Übungen zum Selbsttest: Uneigentliche Integrale155
4.5. Parameterintegrale156
4.5.1. Differentiation eines Parameterintegrals156
4.5.2. Integration von Parameterintegralen158
4.5.3. Uneigentliche Parameterintegrale160
4.5.4. Übungen zum Selbsttest: Parameterintegrale161
4.6. Die 5-Funktion161
4.6.1. Heuristische Motivation161
4.6.2. Definition der 5-Funktion163
4.6.3. Darstellung durch „glatte“ Funktionen164
4.6.4. Praktischer Umgang165
4.6.5. Übungen zum Selbsttest: 5-Funktion167
5. Vektorintegration	
5.1. (Gewöhnliches) Integral über Vektoren168
5.1.1. Definition168
5.1.2. Beispiele zur übenenden Erläuterung168
5.1.3. Übungen zum Selbsttest: Integral über Vektoren170
5.2. Kurvenintegrale171
5.2.1. Definition171
5.2.2. Verfahren zur Berechnung172
5.2.3. Beispiele zur übenenden Erläuterung173
5.2.4. Kurvenintegrale über Gradientenfelder: Unabhängigkeit vom Weg175
5.2.5. Wirbelfreiheit als Kriterium178
5.2.6. Beispiel184
5.2.7. Kurvenintegrale mit anderem Vektorcharakter: Skalare Felder, Vektorprodukte185
5.2.8. Übungen zum Selbsttest: Kurvenintegrale187
5.2.9. Das Vektorpotential188
5.3. Flächenintegrale191
5.3.1. Definition191

5.3.2. Beschreibung von Flächen im Raum	193
5.3.2.1. Kartesische Parameter. 5.3.2.2. Zylinderkoordinaten.	
5.3.2.3. Kugelkoordinaten. 5.3.2.4. Übungen zum Selbsttest:	
Krummlinige Koordinaten. 5.3.2.5. Flächenelemente	
5.3.3. Doppelintegrale	198
5.3.3.1. Definition. 5.3.3.2. Iterierte Integrale. 5.3.3.3. Übungen	
zum Selbsttest: Doppelintegrale	
5.3.4. Wechsel der Variablen	201
5.3.4.1. Parametertransformation. 5.3.4.2. Die Funktionaldeter-	
minante. 5.3.4.3. Die Transformation von Flächenelementen.	
5.3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Variablentransformation	
5.3.5. Berechnung von Flächenintegralen	206
5.3.5.1. Zusammenfassung der Formeln. 5.3.5.2. Beispiele zur	
übenden Erläuterung. 5.3.5.3. Flächenintegrale in Parameterdar-	
stellung. 5.3.5.4. Beispiele zur übenden Erläuterung	
5.3.6. Übungen zum Selbsttest: Flächenintegrale	215
5.4. Volumenintegrale	215
5.4.1. Definition	216
5.4.2. Dreifachintegrale	216
5.4.3. Wechsel der Variablen	218
5.4.3.1. Funktionaldeterminante. 5.4.3.2. Transformation von	
Volumenelementen	
5.4.4. Vektorielle Volumenintegrale	222
5.4.5. Beispiele zur übenden Erläuterung	222
5.4.6. Übungen zum Selbsttest: Volumenintegrale	224

6. Integralsätze

6.1. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Flächeninte-	
gralen	226
6.1.1. Integraldarstellung von div	226
6.1.2. Integraldarstellung von v allgemein.	228
6.2. Der Gaußsche Satz	229
6.2.1. Herleitung und Formulierung.	229
6.2.2. Beispiele und Erläuterungen	231
6.2.3. Allgemeine Form des Gaußschen Satzes.	233
6.2.4. Der Gaußsche Satz in D Dimensionen.	234
6.3. Partielle Integration mittels Gaußschem Satz	235
6.3.1. Methode	236
6.3.2. Beispiele.	236
6.3.3. Der Greensche Satz	237
6.4. Übungen zum Selbsttest: Gaußscher Satz.	238

6.5. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Kurvenintegralen	238
6.5.1. Kurvenintegral-Darstellung von rot	238
6.5.2. Kurvenintegral-Darstellung von V allgemein.	240
6.6. Der Stokessche Satz	241
6.6.1. Herleitung und Formulierung	241
6.6.2. Beispiele und Erläuterungen.	243
6.6.3. Allgemeine Form des Stokesschen Satzes.	245
6.6.4. Der Stokessche Satz in D Dimensionen.	246
6.7. Übungen zum Selbsttest: Stokesscher Satz	247
6.8. Die Integralsätze in $D = 4$ Dimensionen.	248

7. Krummlinige Koordinaten

7.1. Lokale Koordinatensysteme.	250
7.1.1. Das Linienelement in krummlinigen Koordinaten.	250
7.1.2. Krummlinig-orthogonale Koordinaten.	251
7.1.3. Zylinder-und Kugelkoordinaten als Beispiele.	253
7.1.4. Übungen zum Selbsttest: Krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme.	253
7.2. Differentialoperatoren in krummlinig-orthogonalen Koordinaten	254
7.2.1. grad, div, rot, A allgemein	254
7.2.2. Die Formeln in Zylinderkoordinaten.	256
7.2.3. Die Formeln in Kugelkoordinaten.	257
7.2.4. Übungen zum Selbsttest: Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten.	258

8. Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1. Physikalische Motivation.	260
8.2. Lösen von Differentialgleichungen.	263
8.3. Trennung der Variablen	264
8.3.1. Verfahren.	264
8.3.2. Beispiele zur übenden Erläuterung.	266
8.3.3. Separable Differentialgleichungen.	269
8.4. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	271
8.5. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung.	273
8.5.1. Homogene Gleichungen	273
8.5.2. Gekoppelte homogene Differentialgleichungen (N Variable)	276
8.5.3. Inhomogene Differentialgleichungen.	278
8.6. Geometrische Methoden.	279

8.7. Chaos	281
8.8. Iterative Lösungsverfahren (Algorithmen)	287
8.8.1. Euler-Cauchysches Polygonzugverfahren.	287
8.8.2. Integralgleichungsverfahren	288
8.8.3. Praxis iterativer Verfahren.	290
8.9. Übungen zum Selbsttest; Differentialgleichungen.	291

9. Randwertprobleme

9.1. Die Rolle der Randbedingungen; Eindeutigkeitssatz	294
9.2. Bestimmung eines wirbelfreien Feldes aus seinen Quellen und Randwerten	298
9.2.1. Feld einer Ladungsverteilung im unendlichen Raum.	298
9.2.2. Feld einer Ladungsverteilung bei endlichem Rand; Greensche Funktionen.	301
9.3. Wirbel- und quellenfreie Vektorfelder.	305
9.4. Bestimmung eines quellenfreien (inkompressiblen) Feldes aus seinen Wirbeln.	306
9.4.1. Wirbelfeld im unendlichen Raum.	307
9.4.2. Wirbelfeld im endlichen Bereich.	308
9.5. Der (Helmholtzsche) Hauptsatz der Vektoranalysis.	310
9.6. Vektordifferentialgleichungen.	311
9.6.1. Elektromagnetische Felder.	311
9.6.1.1. Statistische Felder 9.6.1.2. Feldgetriebene Ströme in Leitern. 9.6.1.3. Elektromagnetische Wellen	
9.6.2. Elastische Körper.	316
9.6.3. Flüssigkeitsströmungen.	317
9.6.4. Reduktion der Vektorpotentialgleichung auf eine Amplitudengleichung	319
9.6.5. Zusammenfassung in Darstellungssätzen.	323

Anhang

Lösungen der Übungen zum Selbsttest	325
Kleine Literaturauswahl.	337
Sachverzeichnis.	338