

# **Einführung in die Quanten-Elektrodynamik**

Von Prof. Dr. rer. nat. Gabriele Kopp  
und Dipl.-Phys. Frank Krüger

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen



B. G. Teubner Stuttgart 1997

# Inhalt

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>1 Relativistische Kinematik</b>	<b>1</b>
1.1 Lorentz-Transformation	1
1.2 Vierervektoren und Skalarprodukte im Minkowski-Raum	6
Vierervektor im Ortsraum	6
Impulsvierervektor	9
Der vierdimensionale Gradient als kovarianter Vierervektor	10
Zeit-, räum- und lichtartige Vierervektoren	11
<b>2 Freie relativistische Wellengleichungen für klassische Felder</b>	<b>14</b>
2.1 Die freie Dirac-Gleichung	15
Die kanonische Form	15
Die kovariante Form	18
Kontinuitätsgleichung und Viererstrom	21
Die Clifford-Algebra der $\gamma$ -Matrizen	23
Lorentz-Kovarianz (Forminvarianz) der Dirac-Gleichung	24
Die Spinortransformation	26
Der Spin der Dirac-Teilchen	30
Lösungen der freien Dirac-Gleichung	34
Projektionsoperatoren der Dirac-Theorie, Spinsummation	41
Die freie Photonwellengleichung	47
Die kovariante Form der Wellengleichung	47
Der Spin der Photonen	52

<b>3 Hilbert-Raum und Dirac-Formalismus</b>	<b>63</b>
3.1 Hilbert-Raum der freien Wellenfunktionen . . . . .	63
3.2 Der Dirac-Formalismus . . . . .	65
Bra- und ket-Vektoren als Vektoren einer linearen Vektoralgebra	66
Wellenfunktionen im Dirac-Formalismus . . . . .	70
Zustände und Operatoren im Dirac-Formalismus . . . . .	73
Transformationen von Zuständen und Operatoren im Dirac- Formalismus . . . . .	76
<b>4 Diskrete Symmetrietransformationen</b>	<b>83</b>
4.1 Raumspiegelung . . . . .	83
Die Raumspiegelung in der Dirac-Theorie . . . . .	85
Bahnparität und innere Parität . . . . .	86
Eigenvektoren zum Operator $P$ . . . . .	94
4.2 Die Operation der Ladungskonjugation . . . . .	95
Ladungskonjugation für das Dirac-Feld . . . . .	96
Ladungskonjugation im Hilbert-Raum . . . . .	100
4.3 Zeitspiegelung . . . . .	102
Die Zeitspiegelung in der Dirac-Theorie . . . . .	104
Zeitspiegelung im Hilbert-Raum . . . . .	107
<b>5 Quantisierung freier Wellenfelder</b>	<b>109</b>
5.1 Der kanonische Formalismus . . . . .	110
Die Lagrange-Funktion . . . . .	110
Das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	111
Die Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	112
Die kanonisch konjugierten Impulse . . . . .	113
Die Hamilton-Funktion . . . . .	113
Kanonische Quantisierung . . . . .	113
Impulsvierervektor und Spinvektor . . . . .	114
Quantisierungspostulat . . . . .	115

5.2	Quantisierung des freien Dirac-Feldes. . . . .	.117
	Die Lagrange-Dichte. . . . .	.117
	Euler-Lagrange-Gleichungen. . . . .	.118
	Die Hamilton-Funktion. . . . .	.119
	Der Viererimpuls $P^\beta$ des Feldes. . . . .	.119
	Der Spinvektor $S$ des Feldes. . . . .	.120
	Feldquantisierung. . . . .	.120
	Kommutatoralgebra im Ortsraum. . . . .	.138
5.3	Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. . . . .	.142
	Die Lagrange-Dichte. . . . .	.142
	Euler-Lagrange-Gleichungen. . . . .	.143
i .	Die Hamilton-Funktion. . . . .	.144
	Der Viererimpuls $P^\beta$ des Feldes. . . . .	.146
	Der Spinvektor $S$ des Feldes. . . . .	.147
	Feldquantisierung. . . . .	.147
	Kommutatoralgebra im Ortsraum. . . . .	.157
	Gupta-Bleuler-Formalismus. . . . .	.159
^	Positivität des Energieoperators. . . . .	.160
<b>6</b>	<b>Quantisierung wechselwirkender Felder in der QED</b>	<b>163</b>
<b>6.1</b>	Die allgemeine Lagrange-Dichte. . . . .	.163
6.2	Die Wechselwirkungsgleichungen. . . . .	.166
1	Dirac-Feld. . . . .	.166
	Photonfeld. . . . .	.166
6.3	Quantisierung. . . . .	.167
	Quantenbedingung. . . . .	.167
	Kausalitätsprinzip. . . . .	.168

<b>7 Störungstheorie</b>	<b>171</b>
7.1 Die Dyson-Entwicklung der Streumatrix . . . . .	171
Schrödinger-Bild . . . . .	171
Heisenberg-Bild . . . . .	173
Wechselwirkungsbild . . . . .	175
Dirac-Operatoren im Wechselwirkungsbild . . . . .	179
7.2 Das Wick-Theorem . . . . .	189
Zeitordnung $T$ nach Wick . . . . .	189
Wick-Zeitordnung und Normalprodukt . . . . .	190
Kontraktion und Feynman-Propagatoren . . . . .	192
Vakuumerwartungswerte von T-Produkten . . . . .	193
Wick-Theorem . . . . .	194
7.3 Feynman-Graphen und Feynman-Regeln . . . . .	197
Feynman-Graphen im Ortsraum . . . . .	199
Feynman-Regeln im Ortsraum . . . . .	204
Feynman-Regeln im Impulsraum . . . . .	206
7.4 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsbreite . . . . .	226
Differentieller Wirkungsquerschnitt $da_{ae}$ . . . . .	228
Differenzielle Zerfallsbreite $dT^\wedge$ . . . . .	236
<b>8 Anwendung der Störungstheorie: Strahlungskorrekturen</b>	<b>237</b>
8.1 Das anomale magnetische Moment des Elektrons . . . . .	238
8.2 Die Selbstenergie des Elektrons . . . . .	247
8.3 Die Ward-Identität . . . . .	256
8.4 Die Vakuumpolarisation . . . . .	259
<b>9 Einblick in die Theorie der Renormierung</b>	<b>267</b>
9.1 Renormierung in der $A\langle\wedge^4$ -Theorie . . . . .	268
Renormierung von Masse und Wellenfunktion . . . . .	273
Renormierung der Kopplungskonstanten $A_0$ . . . . .	277
Counterterme . . . . .	279
Die kovariante Regularisierung . . . . .	281

<b>A Anhang • Einheiten und physikalische Konstanten</b>	<b>285</b>
<b>B Anhang • Zusammenstellung und Herleitung mathematischer Relationen</b>	<b>287</b>
B.1 Eigenschaften und Spur-Theoreme der $\gamma$ -Matrizen . . . . .	287
Spur-Theoreme . . . . .	289
Das Pauli-Fundamentaltheorem . . . . .	290
B.2 Lorentz-Transformation im Impulsraum . . . . .	290
Boost-Operation vom Ruhssystem in eine beliebige Impulsrichtung . . . . .	290
B.3 Die $n$ -dimensionale Regularisierung . . . . .	296
Clifford-Algebra in $n$ Dimensionen . . . . .	297
Eigenschaften der Gamma- und Betafunktion . . . . .	298
Feynman-Parametrisierung . . . . .	300
Wick-Rotation . . . . .	301
Das skalare Integral . . . . .	305
Tensorintegrale höherer Stufen . . . . .	310
B.4 Die Operatoridentität $e^A e^{-B} = e^{f(A,B)}$ . . . . .	313
B.5 Feynman-Regeln bei asymmetrischer Definition der Fourier-Darstellung . . . . .	316
<b>C Anhang • Herleitung einiger im Hauptteil benutzter Ergebnisse</b>	<b>318</b>
C.1 Darstellung des magnetischen Momentes in der Dirac-Theorie . . . . .	318
Das Impulsmatrixelement des Dirac-Stromes . . . . .	318
Das Matrixelement des elektromagnetischen Stromes für endliche Ladungsverteilung . . . . .	320
Die Gordon-Zerlegung im Ortsraum . . . . .	322
Das magnetische Moment . . . . .	323
C.2 Polarisationsvektoren $e^\lambda(k)$ . . . . .	327
Explizite Darstellung der Polarisationsvektoren für massive Vektorteilchen . . . . .	328

Explizite Darstellung der Polarisationsvektoren für das masselose Photon . . . . .	330
Polarisationssumme für massive Vektorteilchen . . . . .	331
Polarisationssumme für das masselose Photonfeld . . . . .	332
C.3 Die Dichte des Drehimpulstensors $M^{\beta}_{\alpha\gamma}(x)$ . . . . .	337
Aussagen des Noether-Theorems. . . . .	338
C.4 Vertexfaktoren und Propagatoren in der nichtrelativistischen Störungstheorie. . . . .	350
Propagator in der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung	352
Propagatoren in der relativistischen Theorie. . . . .	353
<b>Literaturhinweise</b>	<b>361</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>363</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>366</b>