

Der Ingenieurbau

■ **Mathematik**

■ **Technische Mechanik**

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Verzeichnis der Verfasser

Mathematik

1	Einleitung	1
2	Lineare Gleichungssysteme	2
2.1	Spezielle Matrizen	2
2.1.1	Einheitsmatrizen	3
2.1.2	Permutationsmatrizen	4
2.1.3	Elementarmatrizen (Frobenius-Matrizen)	5
2.2	Verschiedene Matrizeninverse	7
2.3	Lösbarkeit linearer algebraischer Gleichungssysteme	12
2.4	Auflösung von Gleichungssystemen mit Blöcken	17
3	Das Kontraktionsprinzip in metrischen Räumen	22
3.1	Das Cauchy-Problem für gewöhnliche Differentialgleichungen als Modellproblem	22
3.2	Metrische Begriffe	23
3.3	Abbildungen	26
3.3.1	Abbildungen in metrischen Räumen	26
3.3.2	Das Kontraktionsprinzip	27
3.4	Der Existenzsatz von Picard	29
3.5	Die Vervollständigung metrischer Räume	31
3.6	Vektorräume	33
3.7	Normierte Räume	35
3.7.1	Die $\ \cdot\ _p$ Normen auf \mathbb{R}^n	36
3.7.2	Der Banachraum $\ell^p(\mathbb{R})$	39
3.8	Der Banachraum $L^p(\Omega)$	41
3.8.1	Die $\ \cdot\ _p$ -Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	41
3.8.2	Das Lebesgue-Maß	44
3.8.3	Die Vervollständigung von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ bezüglich $\ \cdot\ _p$	45
3.9	Beschränkte lineare Operatoren auf normierten Räumen	46
3.10	Hilberträume	49
4	Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	51
4.1	Stationäre Iterationsverfahren	53
4.2	Instationäre Iterationsverfahren	57
4.3	Parallele Iterationsverfahren	86
5	Elliptische Variationsprobleme	89
5.1	Das Dirichlet-Problem für elliptische partielle Differentialgleichungen	89

5.2	Der Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega)$	94
5.3	Die Reduktion des Randwertproblems auf ein Minimierungsproblem	97
5.4	Variationsprobleme in Hilberträumen	99
5.4.1	Konvexe Teilmengen	100
5.4.2	Formulierung des Variationsproblems	100
5.4.3	Vergleichbare Normen	101
5.4.4	Beweis des Existenzsatzes 5.4.1 für Minimumprobleme und Variationsungleichungen	102
5.4.5	Darstellungssätze als Folgerungen	104
5.5	Orthogonalzerlegungen von Hilberträumen	106
5.6	Orthogonalprojektionen im Hilbertraum	108
5.7	Die Konstruktion der Lösung von Variationsgleichungen mit dem Galerkin-Verfahren	110
5.7.1	Die Lösbarkeit des Galerkin-Systems	110
5.7.2	Die Konvergenz der Galerkin-Approximationen	111
5.8	Variationslösungen der Dirichletschen Randwertaufgabe	114
5.9	Variationslösungen der Neumannschen Randwertaufgabe	124
5.10	Ein Beispiel der Anwendung des Galerkin-Verfahrens	134
6	Zeitabhängige Probleme mit partiellen Differentialgleichungen	145
6.1	Das Cauchy-Dirichlet-Problem parabolischer Gleichungen als Modellproblem	145
6.2	Fourier-Reihen in Hilberträumen	149
6.2.1	Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren	157
6.3	Eigenwertprobleme mit symmetrischen kompakten Operatoren	159
6.3.1	Ein Berechnungsverfahren für Eigenwerte und Eigenvektoren	164
6.4	Eigenwerte und Eigenfunktionen elliptischer Probleme	167
6.5	Hilberträume zeitabhängiger Funktionen	173
6.5.1	Fourierentwicklungen nach Eigenfunktionen	174
6.5.2	Die Hilberträume $L^2[(0, T); H_0^1(\Omega)]$	176
6.6	Existenz und a-priori-Abschätzungen der Galerkin-Approximationen	180
6.7	Existenz, Eindeutigkeit und Galerkin-Approximation der verallgemeinerten Lösung des Cauchy-Dirichlet-Problems	185
7	Fredholmsche Integralgleichungen in Banachräumen	189
7.1	Die Fredholmschen Integralgleichungen als Modellprobleme	189
7.2	Eindeutig lösbare Operatorgleichungen	190
7.2.1	Gleichmäßig beschränkte Operatorfamilien	190
7.2.2	Die Neumannsche Reihe	192
7.3	Galerkin-Verfahren für Operatorgleichungen	194
7.3.1	Die Äquivalenz der Normen endlichdimensionaler Vektorräume	194
7.3.2	Der Satz von Hahn-Banach und einige Konsequenzen	197
7.3.3	Biorthogonalität	200
7.3.4	Zerlegung von Banachräumen in direkte Summen	201
7.3.5	Projektoren in Banachräumen	202
7.3.6	Das Galerkin-Verfahren mit Riesz-Schauder-Operatoren	203
7.4	Operatoren von endlichem Rang	207
7.5	Einige Ergebnisse aus der Theorie der Banachräume	211
7.5.1	Annulatoren	211

7.5.2	Faktorräume	213
7.6	Adjungierte Operatoren	216
7.6.1	Kompakte lineare Operatoren	218
7.7	Beispiele kompakter Operatoren	222
7.8	Die Fredholmschen Sätze für Riesz-Schauder-Operatoren	222
8	Vektoren und Tensoren	228
8.1	Vektoren und Kovektoren	228
8.1.1	Basen und Kobasen	229
8.1.2	Transformationsformeln für kontravariante und kovariante Vektoren	229
8.2	Tensoren	230
8.2.1	Tensorprodukte	231
8.2.2	Transformationsformeln für Tensoren	233
8.3	Alternierende Tensoren	234
9	Mannigfaltigkeiten	236
9.1	Punkttransformationen	236
9.2	Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n	238
9.3	Differenzierbare Abbildungen	239
9.4	Lokale Diffeomorphismen in \mathbb{R}^m	240
9.5	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^n	242
9.6	Tangentenräume	248
10	Grundbegriffe der Analysis auf Mannigfaltigkeiten	250
10.1	Funktionen auf Mannigfaltigkeiten	250
10.2	Ableitungen und Differentiale über Γ	252
10.3	Differentialformen über Γ	256
10.4	Das Integral von Differentialformen	261
11	Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik	265
11.1	Statistische Datenaufbereitung	265
11.2	Merkmalsräume und Ereignisse	266
11.3	Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Kennzahlen	268
11.4	Spezielle Verteilungen	270
11.5	Mehrdimensionale Verteilungen	275
11.6	Funktionen von Zufallsvariablen	277
11.7	Simulation von Zufallsgrößen	281
11.8	Anpassung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen an statistische Daten	283
11.8.1	Statistische Schätzung der Modellparameter	284
11.8.2	Test für den Mittelwert der Normalverteilung	287
11.8.3	Methoden zur Auswahl von Verteilungen auf empirischer Basis	289
11.9	Lineare Regression und Korrelation	294
11.10	Varianzanalyse	299
11.11	Stochastische Prozesse	301
11.11.1	Poisson-Prozeß und Gauß-Prozeß	303
11.11.2	Markov-Prozesse und Markov-Ketten	304
11.11.3	Spektralanalyse, weißes Rauschen	307
11.11.4	Kanonische Summendarstellungen von Zufallsprozessen	310
12	Literatur	312

Technische Mechanik Teil (I) Starrkörperstatik

Teil (II) Elastostatik (Seite XIII bzw. 432 ff.)

Teil (III) Kinematik und Kinetik (Seite XVII bzw. 585 ff.)

	Widmung	317
1	Einführung	317
1.1	Klassifizierung	317
1.2	Aufgabenstellungen der Mechanik	317
1.3	Begriffe und Klassifizierungen	318
2	Grundlagen	320
2.1	Geschichtliche Entwicklung	320
2.2	Physikalische Größen, Dimensionen und Einheiten	322
2.2.1	Gesetzliche Vorgaben	322
2.2.2	Physikalische Größe (DIN 1313)	323
2.2.3	Dimensionen (DIN 1313)	323
2.2.4	Einheiten (DIN 1313)	324
2.2.5	Zahlenwert	324
2.2.6	SI-Basiseinheiten	324
2.2.7	Abgeleitete Einheiten	325
2.2.8	Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten	327
2.2.9	Schreibweisen	327
3	Kraftbegriffe und Grundgesetze (Axiome) der klassischen Mechanik	328
3.1	Historische Anmerkungen	328
3.2	Meßvorschriften für Masse und Kraft	329
3.3	Die Grundgesetze der klassischen Mechanik starrer Körper	331
3.4	Klassifikation von Kräften nach verschiedenen Eigenschaften	337
3.4.1	Physikalisch eingeprägte Kraft	337
3.4.1.1	Masse-gebundene Kraft oder Volumenkraft \vec{k} , z. B. Gewichtskraft	337
3.4.1.2	Flächenbezogene Kraft \vec{p} , z. B. Winddruck	337
3.4.1.3	Linienbezogene Kraft \vec{q}	338
3.4.1.4	Einzel- oder Punktlast \vec{F}	338
3.4.2	Äußere und innere Kräfte eines Tragwerks	338
3.4.2.1	Äußere Kräfte	338
3.4.2.2	Innere Kräfte oder Schnittkräfte	339
4	Das zentrale ebene Kräftesystem	339
4.1	Analytische Behandlung der drei Grundaufgaben	339
4.1.1	1. Grundaufgabe: Reduktion der Kräfte auf eine resultierende Kraft (Resultierende)	339
4.1.2	2. Grundaufgabe: Gleichgewichtsbedingungen	341
4.1.3	3. Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte mit gegebenen Wirkungslinien	341
4.2	Graphische Behandlung der drei Grundaufgaben zentraler ebener Kräftesysteme	344
4.2.1	Reduktion der Kräfte auf eine Resultierende	344
4.2.2	Gleichgewicht von Kräften	345
4.2.3	Zerlegung einer Kraft	345

5	Nichtzentrale, allgemeine ebene Kräftesysteme an einer starren Scheibe	345
5.1	Polares Moment einer Kraft	345
5.1.1	Analytische Darstellung des polaren Moments einer Kraft	346
5.1.2	Das polare Moment infolge von zwei, drei und beliebig vielen Kräften	347
5.2	Das Kräftepaar und seine statische Wirkung, die Drehkraft	349
5.3	Analytische Behandlung der drei Grundaufgaben	351
5.3.1	1. Grundaufgabe: Reduktion	351
5.3.2	2. Grundaufgabe: Gleichgewichtsbedingungen	353
5.3.3	3. Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft in drei Kräfte mit gegebenen Wirkungslinien	355
5.4	Graphische Behandlung der drei Grundaufgaben	358
5.4.1	1. und 2. Grundaufgabe: Reduktion und Gleichgewicht	358
5.4.2	3. Grundaufgabe: Zerlegung	358
5.5	Graphische Behandlung der Grundaufgaben mit Hilfe des Seilecks	359
5.5.1	1. und 2. Grundaufgabe: Reduktion und Gleichgewicht	359
5.6	Auflagerreaktionen ebener Tragwerke aus einer starren Scheibe	361
5.6.1	Lagerformen	361
5.6.2	Abzählformeln für geometrische und statische Bestimmtheit einer Scheibe	363
5.6.2.1	Geometrische Betrachtung	363
5.6.2.2	Statische Betrachtung	363
5.6.2.3	Zur Frage hinreichender Bedingungen und damit der Brauchbarkeit	363
6	Kräfte an ebenen Tragwerken aus mehreren starren Scheiben mit Zwischenbindungen	365
6.1	Systemanalyse	365
6.1.1	Koppel- oder Übertragungselemente	365
6.1.2	Abzählformeln für geometrische und statische Bestimmtheit	366
6.1.2.1	Geometrische Betrachtung	366
6.1.2.2	Statische Betrachtung	367
6.1.3	Beispiele ebener Stabtragwerke in systematischer Folge	368
6.1.3.1	Systeme mit einer Scheibe	368
6.1.3.2	Systeme mit mehreren Scheiben	370
6.2	Berechnung der Auflager- und Zwischenreaktionen statisch bestimmter Systeme	371
6.2.1	Mögliche Vorgehensweisen	371
6.2.2	Analytische und graphische Ermittlung der Lager- und Zwischenreaktionen eines Dreigelenktragwerks	371
6.2.3	Seil oder Kette mit kleinem Durchhang	373
7	Schnittgrößen in statisch bestimmten ebenen Tragwerken	376
7.1	Biegemomente und Querkräfte in Stäben unter Querbelastung	376
7.1.1	Direkte Bestimmung der Lagerreaktionen und Schnittgrößen mit Hilfe des Schnittprinzips	376
7.1.2	Berechnung der Biegemomente und Querkräfte durch Lösen der Differentialgleichung für das Biegemoment	378
7.2	Normalkräfte in prismatischen Stäben	381
7.3	Stabkräfte in ebenen Fachwerken	383
7.3.1	Gliederung und Eigenschaften von Fachwerken	383
7.3.2	Analytische Ermittlung der Stabkräfte von Fachwerken	384

7.3.2.1	Rundschnitte um die Knoten	384
7.3.2.2	Ritter-Schnittverfahren (nach A. Ritter)	385
7.3.3	Graphische Ermittlung der Stabkräfte mit Hilfe des Cremona-Planes	385
8	Zentrales räumliches Kräftesystem an einem starren Körper	386
8.1	1. Grundaufgabe: Reduktion auf eine resultierende Kraft	386
8.2	2. Grundaufgabe: Gleichgewichtsbedingungen	387
8.3	3. Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft in drei Kräfte durch einen Punkt	388
9	Allgemeine räumliche Kräftesysteme an einem starren Körper	390
9.1	Polares Moment, axiales Moment, Drehkraft eines Kräftepaars	390
9.1.1	Polares Moment einer Kraft \vec{F} bezüglich des Punktes A	390
9.1.2	Axiales Moment einer Kraft \vec{F} bezüglich einer Achse c	391
9.1.3	Kräftepaar und seine statische Wirkung, die Drehkraft	392
9.2	Analytische Behandlung der drei Grundaufgaben	395
9.2.1	1. Grundaufgabe: Reduktion des allgemeinen räumlichen Kräftesystems	395
9.2.1.1	Reduktion auf eine Dynamie bezüglich eines beliebigen Punktes A	395
9.2.1.2	Reduktion auf eine Kraftschraube in verschobener Lage von \vec{R} durch Punkt B	396
9.2.1.3	Analytische Reduktion in einem Schritt	398
9.2.1.4	Sonderfälle der Reduktion, für die eine Totalresultierende existiert	399
9.2.1.5	Gültigkeit des Momentensatzes im Falle der Existenz einer Totalresultierenden	400
9.2.2	2. Grundaufgabe: Gleichgewichtsbedingungen	400
9.2.3	3. Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft in 6 Kräfte mit gegebenen Wirkungslinien	402
9.3	Abzählformeln für geometrische oder statische Bestimmtheit, Lagerformen	403
9.3.1	Geometrische Betrachtung	403
9.3.2	Statische Betrachtung	403
9.3.3	Räumliche Lagerformen	404
10	Kräftemittelpunkt, Schwerpunkt	405
10.1	Der Kräftemittelpunkt eines Parallelkraftsystems mit gegebenen Angriffspunkten	405
10.2	Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines materiellen Körpers	407
10.2.1	Auffassung der Kräfte \vec{F}_i als Gewichte kontinuierlicher Einzel- massen m_i von homogenen Teilkörpern B_i im Schwerfeld	407
10.2.2	Geometrischer Schwerpunkt S_G	407
10.2.3	Schwerpunkt von Körpern mit kontinuierlich veränderlicher Dichte	407
10.2.4	Flächenschwerpunkt	408
10.2.5	Linienschwerpunkt	410
10.2.6	Wichtige Regeln für die Schwerpunktbestimmung	411
11	Coulombsche Theorie der Haftreibung – Reibung der Ruhe	413
11.1	Einschränkende Voraussetzungen und experimentelle Befunde	413
11.2	Gleichgewichtsbedingungen und Coulombsches Haftreibungskriterium	414
11.3	Abhängigkeiten des Haftreibungskoeffizienten	414
11.4	Abschließende Bemerkungen	416

11.5	Beispiel für die graphische Ermittlung des Zustandes der Haftreibung . . .	416
12	Coulombsche Theorie der Gleitreibung – Reibung der Bewegung	417
12.1	Gedankenexperiment für gleichförmiges Gleiten	417
12.2	Gleichgewichtsbedingungen und Coulombsches Gleitreibungsgesetz	417
13	Rollreibung, Rollwiderstand	419
14	Seilreibung	420
14.1	Quasistatisches Gleiten eines Seils über einen festen kreiszylindrischen Block	420
14.2	Seil- oder Riemenantrieb mittels Haftreibung zwischen Seil und einer reibungsfrei gelagerten Rolle	422
15	Mechanische Arbeit einer Kraft längs eines Weges	423
15.1	Definition der mechanischen Arbeit	423
15.2	Wichtige Sonderfälle	423
15.2.1	Arbeit einer konservativen Kraft	423
15.2.2	Statische Belastung einer linearen Feder mit einer konservativen Kraft	425
15.3	Mechanische Arbeit einer eingepprägten Drehkraft längs kleiner Systemdrehungen	427
16	Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Starrkörpermechanik (P.d.v.A.)	428

Technische Mechanik Teil (II) Elastostatik

1	Inhaltlicher und methodischer Überblick	432
1.1	Gründe für die Einführung deformierbarer Körper	432
1.2	Inhaltlicher und methodischer Rahmen	432
2	Das Hookesche Elastizitätsgesetz für den Zugstab und für ein Schubfeld	433
2.1	Das Hookesche Gesetz für den Zugstab	433
2.2	Das lineare Elastizitätsgesetz für ein Schubfeld	435
3	Lineare kinematische Beziehungen für 1D-, 2D- und 3D-Verzerrungszustände	437
3.1	Einführung des materiellen Punktkontinuums	437
3.2	Definition der Dichte in einem Punkt, Erhaltung der Masse, Volumendehnung	438
3.3	Punkt- und Tangentenabbildungen des materiellen Punktkontinuums . . .	438
3.4	Lineare Verzerrungsmaße und Ingenieurverzerrungen	441
3.4.1	Lineare Verzerrungsmaße für den 3D-Verschiebungszustand	441
3.4.2	Lineare Dehnungen für den einachsigen Verschiebungszustand – direkte geometrische Herleitung	443
3.4.3	Lineare Verzerrungen im zweidimensionalen Verschiebungszustand – direkte geometrische Herleitung	444
3.5	Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen für den zwei- dimensionalen Verschiebungszustand	445
3.6	Ermittlung der Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen aus gemessenen Dehnungen	446
4	Mechanische Spannungen und Spannungstransformationen	448
4.1	Definition von Normal- und Schubspannungen im Punkt einer Schnittfläche	448

4.2	Definition der Indizes und positiven Spannungsvektoren	449
4.3	Die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen in orthogonalen Schnitten	450
4.4	Richtungstransformation der Spannungen für 2D-Spannungszustände	450
4.5	Hauptachsentransformation, Hauptspannungsrichtungen und Hauptspannungen	453
4.5.1	Hauptnormalspannungsrichtungen	453
4.5.2	Hauptnormalspannungen	453
4.5.3	Hauptschubspannungsrichtungen	455
4.5.4	Hauptschubspannungen	456
4.5.5	Normalspannungen in den Hauptschubspannungsrichtungen	457
4.6	Hauptnormalspannungen und Hauptspannungsrichtungen durch Lösung eines Eigenwertproblems	457
4.7	Mohrscher Spannungskreis	459
4.8	Richtungstransformationen und Hauptachsen von axialen Flächenträgheitsmomenten	462
4.8.1	Vorbemerkungen	462
4.8.2	Definition der axialen und polaren Flächenträgheitsmomente, Steinerscher Satz	462
4.8.3	Axiale Trägheitsmomente für gedrehte Koordinatenachsen durch den Schwerpunkt	464
5	Spannungstrajektorien	466
6	Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz	468
6.1	Anschauliche Darstellung der Verzerrungs-/Spannungsbeziehungen	468
6.2	Wichtige Sonderfälle	472
6.2.1	Allseitiger Druck oder Zug	472
6.2.1.1	Volumendehnungen (Volumendilatation)	472
6.2.1.2	Kompressionsmodul	473
6.2.2	Ebener Verzerrungszustand	474
6.2.3	Ebener Spannungszustand	475
6.2.4	Rotationssymmetrie	476
6.3	Temperaturbeanspruchung – Beispiele	477
7	Rheologische Modelle für eindimensionale Beanspruchungszustände	478
7.1	Rheologische Grundelemente	478
7.1.1	Hooke-Element	478
7.1.2	Newton-Element	479
7.1.3	St.Venant-Element	480
7.2	Modelle aus der Kombination von zwei Grundelementen	480
7.2.1	Prandtl-Element	480
7.2.2	Maxwell-Element	481
7.2.3	Kelvin-Voigt-Element	482
7.3	Anmerkungen zu weiteren Elementen	482
7.3.1	Burgers-Element	482
7.3.2	Bingham-Element mit Feder	483
8	Die technische Biegetheorie des dünnen prismatischen Balkens	484
8.1	Die gerade Biegung des prismatischen Balkens	484
8.1.1	Voraussetzungen	484

8.1.2	Schnittgrößen, Gleichgewichtsbedingungen	485
8.1.3	Grundlegende Annahmen für die Berechnung der Spannungen	486
8.1.4	Berechnung der Biegenormalspannungen aus den Schnittkräften	488
8.1.5	Die Differentialgleichung der Biegelinie bei Vernachlässigung der Schubdeformationen	489
8.1.5.1	Beispiel	491
8.1.6	Die Differentialgleichung der Biegelinie mit genauer Darstellung der Krümmung	492
8.2	Schiefe Biegung	494
8.2.1	Gleichung der Spannungsnulllinie	495
8.2.2	Berechnung der Verschiebungen	496
8.3	Berechnung der Schubspannungen infolge Querkraft aus dem Gleichgewicht	497
8.3.1	Herleitung der Dübelformel	497
8.3.2	Beispiele zur Schubspannungsberechnung	498
8.3.2.1	Rechteckquerschnitt	498
8.3.2.2	Verdübelter Holzbalken	500
9	Schubspannungen in Balken mit allgemeinen einfachsymmetrischen Querschnitten	502
9.1	Vollquerschnitte	502
9.2	Dünnwandige Profile	503
9.2.1	Schubfluß in dünnwandigen Profilen	504
9.2.2	Besondere Eigenschaften des Schubflusses	505
9.2.2.1	Dickensprung des Profils	505
9.2.2.2	Profilecke	506
9.2.2.3	Profilverzweigung	506
9.2.2.4	Profilrand	507
9.3	Lage des Schubmittelpunktes bei einfachsymmetrischen Profilen	507
9.3.1	Schubmittelpunkt bei dünnwandigen symmetrischen Profilen	507
9.3.2	Schubmittelpunkte einiger symmetrischer Profile	510
9.4	Lage des Schubmittelpunktes bei unsymmetrischen, dünnwandigen Profilen	512
10	Kernfläche von Querschnitten prismatischer Träger	512
10.1	Normalspannungen infolge einer exzentrischen Druckkraft	512
10.2	Einführung der Trägheitsradien	513
10.2.1	Culmannsche Trägheitsellipse	514
10.3	Die vier Grundaufgaben	515
11	Verbundquerschnitte	518
11.1	Beanspruchung eines Verbundquerschnitts durch eine zentrische Normalkraft	518
11.2	Beanspruchung eines Verbundquerschnitts auf Biegung	520
12	Torsion prismatischer Stäbe	522
12.1	Phänomenologische Einführung in die de Saint Venantsche Torsionstheorie	522
12.2	Stäbe mit Vollkreis- und geschlossenen Kreisringquerschnitten	524
12.3	Torsion prismatischer Stäbe mit dünnwandigen, geschlossenen Profilen	525
12.4	Torsion prismatischer Stäbe mit dünnwandigen, offenen Profilen	531

12.4.1	Voraussetzungen und Hypothesen	531
12.4.2	Berechnung der Torsionsschubspannungen und der Verdrillung	533
12.4.3	Zusammengesetzte Rechteckprofile und krummlinige Profile	536
12.5	Ergebnisse der Lösung der Poissonschen partiellen Differentialgleichung für verschiedene Stabquerschnitte	538
13	Formänderungsenergie und Arbeitssätze in der linearen Elastostatik	542
13.1	Äußere Arbeit bei statischer Belastung	542
13.2	Formänderungsenergie und konjugierte Formänderungsenergie	543
13.2.1	Der Energiesatz der isothermen Elastostatik	543
13.2.2	Formänderungsenergie (FE) in prismatischen Stäben infolge aller Schnittgrößen	544
13.2.2.1	Beanspruchung infolge von Normalkräften	545
13.2.2.2	Beanspruchung infolge von Biegemomenten	546
13.2.2.3	Beanspruchung infolge von Querkräften	546
13.2.2.4	Beanspruchung infolge von Torsionsmomenten	548
13.2.2.5	Zusammenstellung der Formänderungsenergie infolge aller Beanspruchungsarten eines Stabes	549
13.2.3	Formänderungsenergie im dreidimensionalen, isotropen linear-elastischen Fall	549
13.2.3.1	Partielle Ableitungen der spezifischen Formänderungsenergie	550
13.2.3.2	Partielle Ableitungen der konjugierten spezifischen Formänderungsenergie	551
13.2.3.3	Wegunabhängigkeit der Formänderungsenergie	551
13.2.3.4	Nachweis von $\nu \leq 0.5$ aus der konjugierten Formänderungsenergie für den hydrostatischen Spannungszustand	552
13.3	Arbeitssätze für Stabsysteme	552
13.3.1	Voraussetzungen und Superpositionsgesetz der linearen Elastostatik	552
13.3.2	Die Sätze von Betti und Maxwell	552
13.3.3	Die Sätze von Castigliano	555
14	Die Stabilität des statischen Gleichgewichts starrer und elastischer Körper	558
14.1	Statische und energetische Kriterien für stabile, neutrale und labile Gleichgewichtszustände	558
14.1.1	Statische Stabilitätskriterien anhand von Beispielen	558
14.1.2	Energetische Stabilitätskriterien	561
14.2	Kritische Last eines starren Stabes mit elastischer Drehfeder – Anwendung statischer und energetischer Indifferenzkriterien	561
14.2.1	Statische Lösung	562
14.2.1.1	Linearisierte kritische Last	562
14.2.1.2	Überkritische Gleichgewichtszustände	563
14.2.2	Energetische Lösung	564
14.2.2.1	Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit (P. d. v. A.)	564
14.2.2.2	Anwendung des Prinzips vom Minimum der gesamten potentiellen Energie	565
14.3	Der Eulersche Knickstab	568
14.3.1	Gleichgewichtsmethode	568
14.3.2	Energiemethode	573
14.3.2.1	Anwendung des P. d. v. A.	573

14.3.2.2	Anwendung des Prinzips vom Minimum der gesamten potentiellen Energie	575
14.4	Die Euler-Hyperbel für biegesteife Stäbe mit zentraler Druckkraft	577
14.5	Der exzentrisch belastete Druckstab	578
14.6	Biegedrillknicken (Kippen) von auf Biegung beanspruchten prismatischen Trägern mit doppelsymmetrischen Querschnitten	580
14.6.1	Problembeschreibung und Voraussetzungen	580
14.6.2	Der Träger mit schmalem Rechteckquerschnitt und Gabellagerung, belastet durch zwei Endmomente; Herleitung der Differentialgleichung und Kritische Last	580
14.6.3	Kritische Lasten bei Querbelastung	583

Technische Mechanik Teil (III) Kinematik und Kinetik

1	Übersicht	585
2	Kinematik des Punktes	585
2.1	Grundbegriffe	585
2.2	Beschreibung des Ortes	587
2.3	Geschwindigkeit und Beschleunigung	587
2.3.1	Bezugssystemfreie Formulierung	587
2.3.2	Darstellung der Kinematiken in verschiedenen Bezugssystemen	590
2.4	Eindimensionale Bewegung	593
2.4.1	Grundaufgaben der Punktkinematik	594
2.4.1.1	Gegeben $x = x(t)$	594
2.4.1.2	Gegeben $v = v(t)$	594
2.4.1.3	Gegeben $a = a(t)$	595
2.4.1.4	Gegeben $v = v(x)$	595
2.4.1.5	Gegeben $a = a(x)$	595
2.4.1.6	Gegeben $a = a(v)$	596
2.4.2	Phasendiagramm	596
3	Kinetik des Massenpunktes	597
3.1	Grundgesetz der Kinetik	597
3.2	Anwendung der Punktkinetik auf starre Körper	598
3.3	Arbeitssatz und Energiesatz	598
3.3.1	Arbeit und Leistung	598
3.3.2	Arbeitssatz	599
3.3.3	Potentialkräfte, potentielle Energie	600
3.3.4	Energiesatz	602
3.4	Impulssatz und Drehimpulssatz	603
3.4.1	Impulssatz	603
3.4.2	Drehimpulssatz	603
3.5	Demonstrative Beispiele zur Punktkinematik	606
3.5.1	Freier Fall mit Luftwiderstand	606
3.5.2	Reibungsfreie Bewegung längs einer schraubenförmigen Bahn	608
4	Relativbewegung	609
4.1	Relativkinematik	609

4.2	Kinetik des Massenpunktes in bewegten Bezugssystemen	612
4.3	Erdfestes Bezugssystem und Inertialsystem	613
4.4	Das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik	614
5	Kinetik des Punkthaufens	615
5.1	Der Massenmittelpunkt und seine Kinematiken	615
5.2	Kräfte am Punkthaufen, Bewegungsgesetz	616
5.3	Impulssatz für den Punkthaufen	617
6	Stoß zweier Punktmassen	617
6.1	Begriffe	617
6.2	Gerader zentraler Stoß zweier Punktmassen	618
6.3	Schiefer zentraler Stoß	622
6.4	Idealer Stoß	623
7	Massengeometrie des starren Körpers	623
7.1	Massenmittelpunkt, Schwerpunkt	623
7.2	Massenträgheitsmomente, Trägheitshauptachsen	625
7.2.1	Massenträgheitsmomente	625
7.2.1.1	Axiale Massenträgheitsmomente	625
7.2.1.2	Zentrifugalmomente	626
7.2.1.3	Trägheitstensor	627
7.2.2	Trägheitshauptachsen	627
7.2.2.1	Definitionen	627
7.2.2.2	Auffinden von Trägheitshauptachsen	627
7.2.3	Sonderfälle	629
7.2.3.1	Dünner scheibenförmiger Körper	629
7.2.3.2	Prismatischer Körper	631
7.2.4	Transformation auf andere Bezugsachsen	631
7.2.4.1	Parallel verschobenes Bezugsachsensystem, Steinerscher Satz	631
7.2.4.2	Um eine Bezugsachse gedrehtes Bezugssystem	632
7.2.4.3	Allgemeine Drehung des Bezugssystems	635
7.3	Massenträgheitsmomente einiger technisch wichtiger Körper	637
8	Kinematik des starren Körpers	638
8.1	Allgemeine räumliche Bewegung	638
8.2	Sonderfall ebene Bewegung	641
9	Kinetik des starren Körpers	643
9.1	Grundgleichungen	643
9.2	Arbeitssatz und Energiesatz	648
9.2.1	Arbeitssatz	648
9.2.2	Energiesatz	650
9.3	Impulssatz und Drehimpulssatz	652
9.3.1	Impulssatz	652
9.3.2	Drehimpulssatz	652
9.4	Sonderfall ebene Bewegung	654
9.5	Bewegung rollfähiger Körper	655
9.6	Das Prinzip von d'Alembert	657
9.6.1	Allgemeine Formulierung des Prinzips	657
9.6.2	Die d'Alembertschen Trägheitswiderstände des starren Körpers	661
9.6.2.1	Allgemeiner Fall	661
9.6.2.2	Sonderfall ebene Bewegung	663
9.6.2.3	Sonderfall Hauptachsensystem	663

9.7	Schnittgrößen in bewegten Körpern	663
9.8	Kinetik von Systemen starrer Körper	665
9.9	Stoß zweier starrer Körper	667
9.10	Kinetische Ersatzsysteme	670
9.10.1	Spezielles Ersatzsystem	670
9.10.2	Allgemeines Ersatzsystem	671
10	Einführung in die Schwingungslehre	672
10.1	Grundbegriffe	672
10.2	Schwingung eines einläufigen linearen Schwingers	673
10.2.1	Differentialgleichung der Schwingung	673
10.2.2	Freie Schwingung	674
10.2.2.1	Lösung der Differentialgleichung	674
10.2.2.2	Freie Schwingung bei Coulombscher Dämpfung	676
10.2.2.3	Ermittlung der Eigenkreisfrequenz mittels des Rayleigh-Quotienten	677
10.2.2.4	Näherungsweise Berücksichtigung der Federmasse	679
10.2.3	Erzwungene Schwingung	681
10.2.3.1	Harmonische Erregung	681
10.2.3.2	Periodische Erregung	686
10.2.3.3	Beliebige Erregung	686
10.3	Schwingung eines einläufigen nichtlinearen Schwingers	688
10.3.1	Differentialgleichung	688
10.3.2	Freie Schwingung eines Schwebpendels	688
10.3.3	Näherungsverfahren zur Ermittlung der Schwingungsdauer	690
10.3.3.1	Methode der kleinen Schwingungen	691
10.3.3.2	Energetische Balance	691
10.3.3.3	Harmonische Balance	692
10.4	Schwingung eines mehrläufigen linearen Schwingers	693
10.4.1	Bewegungsgleichungen für konservative Systeme	694
10.4.2	Freie Schwingungen konservativer Systeme	697
10.4.3	Erzwungene Schwingungen konservativer Systeme	700
10.4.3.1	Harmonische Erregung	700
10.4.3.2	Beliebige Erregung	700
10.4.4	Modale Analyse bei konservativen Systemen	701
10.4.5	Dissipative Systeme	702
10.4.5.1	Dämpfungstypen	702
10.4.5.2	Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung	703
10.4.5.2.1	Anforderungen an die Dämpfungsmatrix	703
10.4.5.2.2	Konstruktion geeigneter Dämpfungsmatrizen	703
11	Einführung in die analytische Mechanik	705
11.1	Lagrangesche Bewegungsgleichungen 2. Art	705
11.2	Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art	709
11.3	Erstes Integral der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen	713
12	Literatur	715

Stichwortverzeichnis

Stichwörter zu Mathematik	717
Stichwörter zu Technische Mechanik	723