

Lothar Papula

# **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3**

**Vektoranalysis  
Wahrscheinlichkeitsrechnung  
Mathematische Statistik  
Fehler- und Ausgleichsrechnung**

4., verbesserte Auflage

Mit zahlreichen Beispielen  
aus Naturwissenschaft und Technik,  
548 Abbildungen und 285 Übungsaufgaben  
mit ausführlichen Lösungen



# Inhaltsverzeichnis

<b>I Vektoranalysis</b> .....	1
<b>1 Ebene und räumliche Kurven</b> .....	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve .....	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter .....	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors .....	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes .....	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve .....	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor .....	16
1.5 Krümmung einer Kurve .....	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten .....	27
<b>2 Flächen im Raum</b> .....	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche .....	31
2.2 Flächenkurven .....	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement .....	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$ .....	43
<b>3 Skalar- und Vektorfelder</b> .....	47
3.1 Ein einführendes Beispiel .....	47
3.2 Skalarfelder .....	50
3.3 Vektorfelder .....	51
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik .....	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld .....	55
3.4.2 Kugelsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld) .....	56
3.4.3 Zylindersymmetrisches Vektorfeld .....	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder .....	60
<b>4 Gradient eines Skalarfeldes</b> .....	61
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten .....	61
4.2 Richtungsableitung .....	65
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$ .....	67
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung .....	69

<b>5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes</b> .....	71
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes .....	71
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	71
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz .....	75
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	78
5.2 Rotation eines Vektorfeldes .....	79
5.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation .....	79
5.2.2 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe .....	83
5.3 Spezielle Vektorfelder .....	85
5.3.1 Quellenfreies Vektorfeld .....	85
5.3.2 Wirbelfreies Vektorfeld .....	86
5.3.3 Laplace- und Poisson-Gleichung .....	88
5.3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes .....	92
<b>6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme</b> .....	92
6.1 Polarkoordinaten .....	92
6.1.1 Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten .....	92
6.1.2 Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten .....	94
6.1.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace- Operator in Polarkoordinaten .....	100
6.1.4 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung .....	103
6.2 Zylinderkoordinaten .....	105
6.2.1 Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten .....	105
6.2.2 Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten .....	110
6.2.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace- Operator in Zylinderkoordinaten .....	115
6.2.4 Zylindersymmetrische Vektorfelder .....	118
6.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massen- punktes in Zylinderkoordinaten .....	120
6.3 Kugelkoordinaten .....	122
6.3.1 Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten .....	122
6.3.2 Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten .....	128
6.3.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace- Operator in Kugelkoordinaten .....	134
6.3.4 Kugelsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	136
6.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer geladenen Kugel .....	139

<b>7 Linien- oder Kurvenintegrale</b> .....	142
7.1 Ein einführendes Beispiel .....	142
7.2 Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	145
7.3 Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	147
7.4 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder .....	151
7.5 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	159
7.5.1 Kugelsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	159
7.5.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	160
7.5.3 Elektrisches Feld eines geladenen Drahtes .....	161
7.6 Arbeitsintegral .....	163
7.6.1 Arbeit eines Kraftfeldes .....	163
7.6.2 Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld .....	164
<b>8 Oberflächenintegrale</b> .....	166
8.1 Ein einführendes Beispiel .....	166
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals .....	171
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals .....	173
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen Koordinaten .....	174
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern .....	186
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	191
8.4.1 Fluß eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels .....	191
8.4.2 Fluß eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders .....	195
8.4.3 Fluß eines kugelsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel .....	198
<b>9 Integralsätze von Gauß und Stokes</b> .....	201
9.1 Gaußscher Integralsatz .....	201
9.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	201
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum .....	203
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene .....	207
9.2 Stokes'scher Integralsatz .....	210
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	217
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	217
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	222
<b>Übungsaufgaben</b> .....	226
Zu Abschnitt 1 .....	226
Zu Abschnitt 2 .....	228
Zu Abschnitt 3 .....	230
Zu Abschnitt 4 .....	232
Zu Abschnitt 5 .....	233
Zu Abschnitt 6 .....	235

Zu Abschnitt 7 .....	238
Zu Abschnitt 8 .....	241
Zu Abschnitt 9 .....	245
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung .....</b>	<b>249</b>
<b>1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik .....</b>	<b>249</b>
1.1 Urnenmodell .....	249
1.2 Permutationen .....	250
1.3 Kombinationen .....	253
1.4 Variationen .....	258
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln .....	262
<b>2 Grundbegriffe .....</b>	<b>262</b>
2.1 Einführende Beispiele .....	262
2.2 Zufallsexperimente .....	266
2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments .....	267
2.4 Ereignisse und Ereignisraum .....	268
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen .....	270
<b>3 Wahrscheinlichkeit .....</b>	<b>274</b>
3.1 Laplace-Experimente .....	274
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome .....	279
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten .....	279
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff .....	282
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit) .....	284
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum .....	285
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse .....	288
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	290
3.5 Multiplikationssatz .....	293
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse .....	297
3.7 Ereignisbäume .....	300
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayes'sche Formel .....	306
<b>4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen .....</b>	<b>313</b>
4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen .....	313
4.1.1 Einführende Beispiele .....	313
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen .....	315
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen .....	316
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung) .....	317
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung) .....	325

<b>5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung</b> .....	332
5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	333
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	333
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen .....	333
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen .....	334
5.2 Erwartungswert einer Funktion .....	336
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls- variablen .....	337
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufalls- variablen .....	341
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion .....	344
<b>6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b> .....	346
6.1 Binomialverteilung .....	346
6.2 Hypergeometrische Verteilung .....	357
6.3 Poisson-Verteilung .....	363
6.4 Gaußsche Normalverteilung .....	367
6.4.1 Allgemeine Normalverteilung .....	367
6.4.2 Standardnormalverteilung .....	370
6.4.3 Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standard- normalverteilung .....	372
6.4.4 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung .....	374
6.4.5 Quantile der Standardnormalverteilung .....	384
6.5 Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Normal- verteilung .....	386
6.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Wahrscheinlichkeits- verteilungen .....	394
6.7 Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung .....	394
<b>7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen</b> .....	397
7.1 Ein einführendes Beispiel .....	397
7.2 Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	400
7.2.1 Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen .....	400
7.2.2 Diskrete zweidimensionale Verteilung .....	402
7.2.3 Stetige zweidimensionale Verteilung .....	405
7.3 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable .....	411
7.4 Funktionen von mehreren Zufallsvariablen .....	417
7.5 Summen und Produkte von Zufallsvariablen .....	419
7.5.1 Additionssatz für Mittelwerte .....	419
7.5.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte .....	421
7.5.3 Additionssatz für Varianzen .....	424
7.5.4 Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen .....	427

7.6 Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen .....	430
7.6.1 Zentraler Grenzwertsatz .....	430
7.6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen ..	432
7.6.3 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace .....	434
<b>8 Prüf- oder Testverteilungen .....</b>	<b>435</b>
8.1 Chi-Quadrat-Verteilung .....	435
8.2 <i>t</i> -Verteilung von Student .....	440
<b>Übungsaufgaben</b>	
Zu Abschnitt 1 .....	445
Zu Abschnitt 2 .....	447
Zu Abschnitt 3 .....	448
Zu Abschnitt 4 .....	451
Zu Abschnitt 5 .....	453
Zu Abschnitt 6 .....	456
Zu Abschnitt 7 .....	460
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik .....</b>	<b>465</b>
<b>1 Grundbegriffe .....</b>	<b>465</b>
1.1 Ein einführendes Beispiel .....	465
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit .....	466
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe .....	468
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe .....	468
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe .....	471
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen) .....	473
<b>2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe .....</b>	<b>479</b>
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe .....	480
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe .....	483
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion .....	483
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe .....	485
<b>3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)</b> .....	<b>487</b>
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung .....	487
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“)	488
3.2.1 Ein einführendes Beispiel .....	489
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen .....	489

3.2.3	Schätzungen für den Mittelwert $\mu$ .....	492
3.2.4	Schätzungen für die Varianz $\sigma^2$ .....	493
3.2.5	Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) .....	494
3.2.6	Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte .....	494
3.3	Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen .....	497
3.3.1	Maximum-Likelihood-Methode .....	498
3.3.2	Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	500
3.3.2.1	Binomialverteilung .....	500
3.3.2.2	Poisson-Verteilung .....	502
3.3.2.3	Gaußsche Normalverteilung .....	505
3.4	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“) .....	508
3.4.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit ...	508
3.4.2	Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	512
3.4.3	Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	519
3.4.4	Vertrauensintervalle für die unbekannt Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung .....	524
3.4.5	Vertrauensintervalle für einen unbekannt Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) .....	528
3.4.6	Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer beliebigen Verteilung .....	533
<b>4</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)</b> .....	<b>534</b>
4.1	Ein einführendes Beispiel .....	534
4.2	Statistische Hypothesen und Parametertests .....	538
4.3	Planung und Durchführung eines Parametertests .....	539
4.4	Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest .....	544
4.5	Spezielle Parametertests .....	549
4.5.1	Tests für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	549
4.5.2	Tests für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	558
4.5.3	Tests für die Gleichheit der unbekannt Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen (Differenzentests) .....	563
4.5.3.1	Abhängige und unabhängige Stichproben .....	563
4.5.3.2	Differenzentests bei abhängigen Stichproben .....	565
4.5.3.3	Differenzentests bei unabhängigen Stichproben .....	570
4.5.4	Tests für die unbekannt Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung .....	582
4.5.5	Tests für einen unbekannt Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) .....	587
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten .....	593



<b>5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)</b> .....	598
5.1 Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests .....	598
5.2 Ein einführendes Beispiel .....	599
5.3 Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“)	601
<b>6 Korrelation und Regression</b> .....	614
6.1 Korrelation .....	614
6.1.1 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe .....	614
6.1.2 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit ..	624
6.2 Regression .....	627
<b>Übungsaufgaben</b>	
Zu Abschnitt 1 .....	633
Zu Abschnitt 2 .....	636
Zu Abschnitt 3 .....	636
Zu Abschnitt 4 .....	639
Zu Abschnitt 5 .....	642
Zu Abschnitt 6 .....	643
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	645
<b>1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Meßabweichungen).</b>	
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung .....	645
<b>2 Statistische Verteilung der Meßwerte und Meßabweichungen („Meßfehler“)</b> ...	649
2.1 Häufigkeitsverteilungen .....	649
2.2 Normalverteilte Meßgrößen .....	651
<b>3 Auswertung einer Meßreihe</b> .....	657
3.1 Mittelwert und Standardabweichung .....	657
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$ , Meßunsicherheit, Meßergebnis ..	665
<b>4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß</b> .....	674
4.1 Ein einführendes Beispiel .....	674
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Meßgröße .....	675
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz) ....	678
4.4 Meßergebnis für eine „indirekte“ Meßgröße .....	682
<b>5 Ausgleichs- oder Regressionskurven</b> .....	689
5.1 Ein einführendes Beispiel .....	689
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“ ..	691

Inhaltsverzeichnis	XV
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade	696
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden	696
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung	704
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel	710
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurückführbar sind	714
<b>Übungsaufgaben</b>	
Zu Abschnitt 3	723
Zu Abschnitt 4	725
Zu Abschnitt 5	728
<b>Anhang</b>	734
<b>Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b>	734
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung	734
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung	736
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	738
Tabelle 4: Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“	740
<b>Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben</b>	744
<b>I Vektoranalysis</b>	744
Abschnitt 1	744
Abschnitt 2	745
Abschnitt 3	748
Abschnitt 4	752
Abschnitt 5	754
Abschnitt 6	758
Abschnitt 7	762
Abschnitt 8	766
Abschnitt 9	770
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	773
Abschnitt 1	773
Abschnitt 2	774
Abschnitt 3	774
Abschnitt 4	777
Abschnitt 5	780
Abschnitt 6	783
Abschnitt 7	787

---

<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	791
Abschnitt 1 .....	791
Abschnitt 2 .....	797
Abschnitt 3 .....	798
Abschnitt 4 .....	801
Abschnitt 5 .....	807
Abschnitt 6 .....	811
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	814
Abschnitt 3 .....	814
Abschnitt 4 .....	815
Abschnitt 5 .....	817
<b>Literaturhinweise</b> .....	823
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	824