

Lothar Papula

Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler

7., durchgesehene und erweiterte Auflage

Mit zahlreichen Abbildungen
und Rechenbeispielen
und einer ausführlichen Integraltafel



Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie	1
1 Grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
2 Rechnen mit reellen Zahlen	2
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen	2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen	5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	5
2.1.5 Grundrechenarten	6
2.2 Zahlensysteme	7
2.3 Intervalle	8
2.4 Bruchrechnung	8
2.5 Potenzen und Wurzeln	10
2.6 Logarithmen	12
2.7 Binomischer Lehrsatz	14
3 Elementare (endliche) Reihen	16
3.1 Definition einer Reihe	16
3.2 Arithmetische Reihen	16
3.3 Geometrische Reihen	16
3.4 Spezielle Zahlenreihen	16
4 Gleichungen mit einer Unbekannten	17
4.1 Algebraische Gleichungen n-ten Grades	17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
4.1.2 Lineare Gleichungen	18
4.1.3 Quadratische Gleichungen	18
4.1.4 Kubische Gleichungen	19
4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen	20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen	21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	22
4.4 Regula falsi	23
4.5 Tangentenverfahren von Newton	24
5 Ungleichungen mit einer Unbekannten	25

6	Lehrsätze aus der elementaren Geometrie	26
6.1	Satz des Pythagoras	26
6.2	Höhensatz	26
6.3	Kathetensatz (Euklid)	27
6.4	Satz des Thaies	27
6.5	Strahlensätze	27
6.6	Sinussatz	28
6.7	Kosinussatz	28
7	Ebene geometrische Körper (Planimetrie)	28
7.1	Dreiecke	28
7.1.1	Allgemeine Beziehungen	28
7.1.2	Spezielle Dreiecke	29
7.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	29
7.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	29
7.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	30
7.2	Quadrat	30
7.3	Rechteck	30
7.4	Parallelogramm	31
7.5	Rhombus oder Raute	31
7.6	Trapez	31
7.7	Reguläres n-Eck	32
7.8	Kreis	32
7.9	Kreis Sektor oder Kreisabschnitt	32
7.10	Kreissegment oder Kreisabschnitt	32
7.11	Kreisring	33
7.12	Ellipse	33
8	Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)	33
8.1	Prisma	33
8.2	Würfel	34
8.3	Quader	34
8.4	Pyramide	34
8.5	Pyramidenstumpf	35
8.6	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	35
8.7	Keil	36
8.8	Gerader Kreiszyylinder	36
8.9	Gerader Kreiskegel	36
8.10	Gerader Kreiskegelstumpf	37
8.11	Kugel	37
8.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	37
8.13	Kugelschicht oder Kugelzone	38
8.14	Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte	38
8.15	Ellipsoid	38
8.16	Rotationsparaboloid	39
8.17	Tonne oder Faß	39
8.18	Toms	40
8.19	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	40

9	Koordinatensysteme	41
9.1	Ebene Koordinatensysteme	41
9.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	41
9.1.2	Polarkoordinaten	42
9.1.3	Koordinatentransformationen	42
9.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	42
9.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	42
9.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	43
9.2	Räumliche Koordinatensysteme	44
9.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	44
9.2.2	Zylinderkoordinaten	44
9.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	44
9.2.4	Kugelkoordinaten	45
9.2.5	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten	45
II	Vektorrechnung	46
1	Grundbegriffe	46
1.1	Vektoren und Skalare	46
1.2	Spezielle Vektoren	46
1.3	Gleichheit von Vektoren	47
1.4	Kollineare, parallele und anti-parallele Vektoren, inverser Vektor	47
2	Komponentendarstellung eines Vektors	48
2.1	Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem	48
2.2	Komponentendarstellung spezieller Vektoren	48
2.3	Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	49
3	Vektoroperationen	50
3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	50
3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	51
3.3	Skalarprodukt (inneres Produkt)	51
3.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	53
3.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	55
3.6	Formeln für Mehrfachprodukte	56
4	Anwendungen	56
4.1	Arbeit einer konstanten Kraft	56
4.2	Vektorielle Darstellung einer Geraden	57
4.2.1	Punkt-Richtungs-Form	57
4.2.2	Zwei-Punkte-Form	57
4.2.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	58

4.2.4	Abstand zweier paralleler Geraden.	58
4.2.5	Abstand zweier windschiefer Geraden.	59
4.2.6	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden.	60
4.3	Vektorielle Darstellung einer Ebene.	60
4.3.1	Punkt-Richtungs-Form.	60
4.3.2	Drei-Punkte-Form.	61
4.3.3	Ebene senkrecht zu einem Vektor.	62
4.3.4	Abstand eines Punktes von einer Ebene.	62
4.3.5	Abstand einer Geraden von einer Ebene.	63
4.3.6	Abstand zweier paralleler Ebenen.	64
4.3.7	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene.	65
4.3.8	Schnittwinkel zweier Ebenen.	66
III Funktionen und Kurven.		67
1	Grundbegriffe.	67
1.1	Definition einer Funktion.	67
1.2	Darstellungsformen einer Funktion.	67
1.2.1	Analytische Darstellung.	67
1.2.2	Parameterdarstellung.	67
1.2.3	Kurvengleichung in Polarkoordinaten.	68
1.2.4	Graphische Darstellung.	68
2	Allgemeine Funktionseigenschaften.	68
2.1	Nullstellen.	68
2.2	Symmetrie.	69
2.3	Monotonie.	69
2.4	Periodizität.	70
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion).	70
3	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion.	71
3.1	Grenzwert einer Folge.	71
3.2	Grenzwert einer Funktion.	72
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	72
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte.	72
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital.	73
3.5	Stetigkeit einer Funktion.	74
4	Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen).	75
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen.	75
4.2	Lineare Funktionen (Geraden).	75
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung.	75
4.2.2	Hauptform einer Geraden.	75
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden.	75
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden.	76

4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	76
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	76
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	76
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	77
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	77
4.3.1	Hauptform einer Parabel	77
4.3.2	Produktform einer Parabel	78
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	78
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades (n-ten Grades)	78
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	78
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	78
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	78
4.5	Horner-Schema	79
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	80
4.7	Interpolationspolynome	81
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	81
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	81
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	83
5	Gebrochenrationale Funktionen	85
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	85
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	86
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	87
6	Potenz- und Wurzelfunktionen	87
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	87
6.2	Wurzelfunktionen	89
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	89
7	Trigonometrische Funktionen	90
7.1	Winkelmaße	90
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	91
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	92
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	93
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	93
7.6	Trigonometrische Formeln	94
7.6.1	Additionstheoreme	94
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	95
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	95
7.6.4	Formeln für Potenzen	96
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	96
7.6.6	Formeln für Produkte	97
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	97
7.7.1	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	97
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	98
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	98
1.12.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	98

7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	99
8	Arkusfunktionen	100
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion	100
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	101
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	102
9	Exponentialfunktionen	103
9.1	Definition der Exponentialfunktionen	103
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen	104
9.2.1	Abklingfunktion	104
9.2.2	Sättigungsfunktion	104
9.2.3	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)	105
9.2.4	Kettenlinie	105
10	Logarithmusfunktionen	106
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen	106
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen	106
11	Hyperbelfunktionen	107
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen	107
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	108
11.3	Formeln	109
11.3.1	Additionstheoreme	109
11.3.2	Formeln für halbe Argumente	109
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments	110
11.3.4	Formeln für Potenzen	110
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen	111
11.3.6	Formeln für Produkte	111
11.3.7	Formel von Moivre	111
12	Areafunktionen	112
12.1	Definition der Areafunktionen	112
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen	113
13	Kegelschnitte	114
13.1	Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes	114
13.2	Kreis	114
13.2.1	Geometrische Definition	115
13.2.2	Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)	115
13.2.3	Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform)	115
13.2.4	Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten	115
13.2.5	Parameterdarstellung eines Kreises	115

13.3	Ellipse	116
13.3.1	Geometrische Definition	116
13.3.2	Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	116
13.3.3	Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform)	116
13.3.4	Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	117
13.3.5	Parameterdarstellung einer Ellipse	117
13.4	Hyperbel	118
13.4.1	Geometrische Definition	118
13.4.2	Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	118
13.4.3	Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform)	118
13.4.4	Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	119
13.4.5	Parameterdarstellung einer Hyperbel	120
13.4.6	Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel	120
13.4.7	Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$)	120
13.5	Parabel	121
13.5.1	Geometrische Definition	121
13.5.2	Scheitelgleichung einer Parabel	121
13.5.3	Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform)	121
13.5.4	Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	122
13.5.5	Parameterdarstellung einer Parabel	122
14	Spezielle Kurven	123
14.1	Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	123
14.2	Epizykloide	123
14.3	Hypozykloide	124
14.4	Astroide (Sternkurve)	125
14.5	Kardioide (Herzkurve)	125
14.6	Lemniskate (Schleifenkurve)	126
14.7	Strophoide	126
14.8	Cartesisches Blatt	127
14.9	„Kleeblatt“ mit n bzw. ln Blättern	127
14.10	Spiralen	128
14.10.1	Archimedische Spirale	128
14.10.2	Logarithmische Spirale	128
IV	Differentialrechnung	129
1	Differenzierbarkeit einer Funktion	129
1.1	Differenzenquotient	129
1.2	Differentialquotient oder 1. Ableitung	129
1.3	Ableitungsfunktion	129
1.4	Höhere Ableitungen	130
1.5	Differential einer Funktion	130
2	Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)	131

3	Ableitungsregeln	.132
3.1	Faktorregel	.132
3.2	Summenregel	.132
3.3	Produktregel	.132
3.4	Quotientenregel	.133
3.5	Kettenregel	.133
3.6	Logarithmische Differentiation	.134
3.7	Ableitung der Umkehrfunktion	.134
3.8	Implizite Differentiation	.135
3.9	Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	.135
3.10	Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve	.136
4	Anwendungen der Differentialrechnung	.136
4.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	.136
4.2	Tangente und Normale	.137
4.3	Linearisierung einer Funktion	.137
4.4	Charakteristische Kurvenpunkte	.138
4.4.1	Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung	.138
4.4.2	Relative Extremwerte (Maxima, Minima)	.138
4.4.3	Wendepunkte, Sattelpunkte	.140
V	Integralrechnung	.141
1	Bestimmtes Integral	.141
1.1	Definition eines bestimmten Integrals	.141
1.2	Berechnung eines bestimmten Integrals	.142
1.3	Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale	.143
2	Unbestimmtes Integral	.144
2.1	Definition eines unbestimmten Integrals	.144
2.2	Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale	.144
2.3	Tabelle der Grund- oder Stammintegrale	.146
3	Integrationsmethoden	.147
3.1	Integration durch Substitution	.147
3.1.1	Allgemeines Verfahren	.147
3.1.2	Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)	.148
3.2	Partielle Integration (Produktionsintegration)	.150
3.3	Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	.151
3.3.1	Partialbruchzerlegung	.151
3.3.2	Integration der Partialbrüche	.154
3.4	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	.155
3.5	Numerische Integration	.155
3.5.1	Trapezformel	.155
3.5.2	Simpsonsche Formel	.156
3.5.3	Romberg-Verfahren	.158

4 Uneigentliche Integrale	161
4.1 Unendliches Integrationsintervall	161
4.2 Integrand mit Pol	161
5 Anwendungen der Integralrechnung	162
5.1 Integration der Bewegungsgleichung	162
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)	162
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion	163
5.3.1 Linearer Mittelwert	163
5.3.2 Quadratischer Mittelwert	163
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion	163
5.4 Flächeninhalt	163
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	165
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	166
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve	166
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	167
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	168
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	169
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	170
VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen	172
1 Unendliche Reihen	172
1.1 Grundbegriffe	172
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe	172
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	172
1.2 Konvergenzkriterien	173
1.2.1 Quotientenkriterium	173
1.2.2 Wurzelkriterium	174
1.2.3 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	174
1.3 Spezielle konvergente Reihen	174
2 Potenzreihen	175
2.1 Definition einer Potenzreihe	175
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe	176
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen	176
3 Taylor-Reihen	177
3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel	177
3.1.1 Taylorsche Formel	177
3.1.2 Mac Laurinsche Formel	177
3.2 Taylorsche Reihe	178
3.3 Mac Laurinsche Reihe	178
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)	179
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)	181

4	Fourier-Reihen	.183
4.1	Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	.183
4.2	Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	.185
4.3	Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	.186
VII	Lineare Algebra	.189
1	Reelle Matrizen	.189
1.1	Grundbegriffe	.189
1.1.1	Definition einer reellen Matrix	.189
1.1.2	Spezielle Matrizen	.190
1.1.3	Gleichheit von Matrizen	.190
1.2	Spezielle quadratische Matrizen	.190
1.2.1	Diagonalmatrix	.191
1.2.2	Einheitsmatrix	.191
1.2.3	Dreiecksmatrix	.191
1.2.4	Symmetrische Matrix	.191
1.2.5	Schiefsymmetrische Matrix	.191
1.2.6	Orthogonale Matrix	.192
1.3	Rechenoperationen für Matrizen	.192
1.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	.192
1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	.192
1.3.3	Multiplikation von Matrizen	.193
1.4	Reguläre Matrix	.194
1.5	Inverse Matrix	.194
1.5.1	Definition einer inversen Matrix	.194
1.5.2	Berechnung einer inversen Matrix	.195
1.5.2.1	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten	.195
1.5.2.2	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} nachdem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	.195
1.6	Rang einer Matrix	.196
1.6.1	Definitionen	.196
1.6.1.1	Unterdeterminanten einer Matrix	.196
1.6.1.2	Rang einer Matrix	.196
1.6.1.3	Elementare Umformungen einer Matrix	.196
1.6.2	Rangbestimmung einer Matrix	.197
1.6.2.1	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A unter Verwendung von Unterdeterminanten	.197
1.6.2.2	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A mit Hilfe elementarer Umformungen	.197
2	Determinanten	.198
2.1	Zweireihige Determinanten	.198
2.2	Dreireihige Determinanten	.199
2.3	Determinanten höherer Ordnung	.200
2.3.1	Unterdeterminante D^A	.200
2.3.2	Algebraisches Komplement (Adjunkte) A^A	.200
2.3.3	Definition einer n -reihigen Determinante	.200

2.4	Laplacescher Entwicklungssatz	201
2.5	Rechenregeln für n-reihige Determinanten	201
2.6	Regeln zur praktischen Berechnung einer /i-reihigen Determinante	203
2.6.1	Elementare Umformungen einer n-reihigen Determinante	203
2.6.2	Reduzierung und Berechnung einer n-reihigen Determinante	203
3	Lineare Gleichungssysteme	204
3.1	Grundbegriffe	204
3.1.1	Definition eines linearen Gleichungssystems	204
3.1.2	Spezielle lineare Gleichungssysteme	204
3.2	Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems	205
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $Ax = c$	205
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems $Ax = c$	205
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	206
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	207
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n)-Systems	207
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	207
3.5	Cramersche Regel	210
3.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	210
4	Komplexe Matrizen	211
4.1	Definition einer komplexen Matrix	211
4.2	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	212
4.3	Konjugiert komplexe Matrix	212
4.4	Konjugiert transponierte Matrix	213
4.5	Spezielle komplexe Matrizen	213
4.5.1	Hermitesche Matrix	213
4.5.2	Schiefhermitesche Matrix	213
4.5.3	Unitäre Matrix	214
5	Eigenwertprobleme	214
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	214
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n-reihiger Matrizen	216
VIII	Komplexe Zahlen und Funktionen	217
1	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	217
1.1	Algebraische oder kartesische Form	217
1.2	Polarformen	218
1.2.1	Trigonometrische Form	218
1.2.2	Exponentialform	218
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	219
1.3.1	Polarform \rightarrow Kartesische Form	219
1.3.2	Kartesische Form \rightarrow Polarform	219

2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen	220
2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	220
2.2 Multiplikation komplexer Zahlen	220
2.3 Division komplexer Zahlen	221
3 Potenzieren	222
4 Radizieren (Wurzelziehen)	223
5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl	224
6 Ortskurven	225
6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen	225
6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl	225
6.3 Inversion einer Ortskurve	226
7 Komplexe Funktionen	227
7.1 Definition einer komplexen Funktion	227
7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen	227
7.2.1 Trigonometrische Funktionen	227
7.2.2 Hyperbelfunktionen	227
7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion)	228
7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln	228
7.3.1 Eulersche Formeln	228
7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion	228
7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument	228
7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument	228
7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument	229
8 Anwendungen in der Schwingungslehre	229
8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	229
8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“)	230
IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	232
1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung	232
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	232
1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen	232
1.2.1 Analytische Darstellung	232
1.2.2 Graphische Darstellung	233
1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	233
1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme	233
1.2.2.3 Höhenliniendiagramm	233

1.3	Spezielle Flächen (Funktionen)	234
1.3.1	Ebenen	234
1.3.2	Rotationsflächen	234
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche	234
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen	235
2	Partielle Differentiation	236
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	236
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$	236
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1, \dots, x_n)$	237
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	238
2.3	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion	239
2.4	Anwendungen	241
2.4.1	Linearisierung einer Funktion	241
2.4.2	Relative Extremwerte (Maxima, Minima)	242
3	Mehrfachintegrale	244
3.1	Doppelintegrale	244
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals	244
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten	245
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten	247
3.1.4	Anwendungen	247
3.1.4.1	Flächeninhalt	247
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	248
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	249
3.2	Dreifachintegrale	250
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals	250
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten	251
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten	253
3.2.4	Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten	253
3.2.5	Anwendungen	254
3.2.5.1	Volumen eines zylindrischen Körpers	254
3.2.5.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers	254
3.2.5.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	255
X	Gewöhnliche Differentialgleichungen	257
1	Grundbegriffe	257
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung	257
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	257
1.3	Anfangswertprobleme	257
1.4	Randwertprobleme	258
2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	258
2.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	258
2.2	Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)	259

2.3	Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung	260
2.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	261
2.4.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	261
2.4.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	261
2.4.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	261
2.4.3.1	Integration durch Variation der Konstanten	261
2.4.3.2	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	262
2.4.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	262
2.5	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	264
2.5.1	Streckenungsverfahren von Euler	264
2.5.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung	266
2.5.3	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	267
3	Differentialgleichungen 2. Ordnung	270
3.1	Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen	270
3.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	271
3.2.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	271
3.2.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	271
3.2.2.1	Wronski-Determinante	271
3.2.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen Differential- gleichung	271
3.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	272
3.3	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung	275
4	Anwendungen	278
4.1	Mechanische Schwingungen	278
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	278
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	278
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	279
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	279
4.1.3.2	Aperiodischer Grenzfall	280
4.1.3.3	Aperiodische Schwingung (Kriechfall)	280
4.1.4	Erzwungene Schwingung	281
4.1.4.1	Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung	281
4.1.4.2	Stationäre Lösung	281
4.2	Elektromagnetische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis	282
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	283
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	283
5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	283
5.2.1	Wronski-Determinante	283
5.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	284
5.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	285

6 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 286

6.1 Grundbegriffe 286

6.2 Integration des homogenen linearen Systems 287

6.3 Integration des inhomogenen linearen Systems 288

 6.3.1 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung 288

 6.3.2 Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren 288

Fehler- und Ausgleichsrechnung 290

Gaußsche Normalverteilung 290

Auswertung einer Meßreihe 291

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz 294

 3.1 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen 294

 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen 296

leares Fehlerfortpflanzungsgesetz 296

sgleichkurven 298

 1.1 Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate 298

 1.2 Ausgleichs- oder Regressionsgerade 299

 13 Ausgleichs- oder Regressionsparabel 301

Laplace-Transformationen 302

rnmdbegriffe 302

Igemeine Eigenschaften der Laplace-Transformation 303

 .1 Linearität (Satz über Linearkombinationen) 303

 »2 Ähnlichkeitssatz 304

 «3 Verschiebung s sätze 304

 \A Dämpfungssatz 306

 Ableitungssätze 306

 2.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion 306

 2.5.2 Ableitungssatz für die Bildfunktion 307

 \J6 Integralsätze 308

 2.6.1 Integralsatz für die Originalfunktion 308

 2.6.2 Integralsatz für die Bildfunktion 309

 kl Faltungssatz 309

 Grenzwertsätze 310

iplace-Transformierte einer periodischen Funktion 311

iplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse) 312

5 Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme	318
5.1 Allgemeines Lösungsverfahren	318
5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	319
5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .	320
6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	321
XIII Vektoranalysis	326
1 Ebene und räumliche Kurven	326
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	326
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	327
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion	327
1.2.2 Tangentenvektor	327
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte	327
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	328
1.3 Bogenlänge einer Kurve	329
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve	329
1.5 Krümmung einer Kurve	330
2 Flächen im Raum	332
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	332
2.2 Flächenkurven	333
2.3 Flächennormale und Flächenelement	333
2.4 Tangentialebene	334
2.4.1 Tangentialebene beim Flächentyp $r = r(u; v)$	334
2.4.2 Tangentialebene beim Flächentyp $z = f(x; y)$	335
2.4.3 Tangentialebene beim Flächentyp $F(x; y; z) = 0$	335
3 Skalar- und Vektorfelder	336
3.1 Skalarfelder	336
3.2 Vektorfelder	336
4 Gradient eines Skalarfeldes	338
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	340
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	340
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	341
5.3 Spezielle Vektorfelder	342
6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen	343
6.1 Darstellung in Polarkoordinaten	343
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten	345
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten	348

7	Linien- oder Kurvenintegrale	350
7.1	Linienintegral in der Ebene	350
7.2	Linienintegral im Raum	352
7.3	Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals	352
7.4	Konservative Vektorfelder	353
7.5	Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)	354
8	Oberflächenintegrale	355
8.1	Definition eines Oberflächenintegrals	355
8.2	Berechnung eines Oberflächenintegrals	356
8.2.1	Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten	356
8.2.2	Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern	357
9	Integralsätze von Gauß und Stokes	358
9.1	Gaußscher Integralsatz	358
9.2	Stokes'scher Integralsatz	359
XIV	Wahrscheinlichkeitsrechnung	361
1	Hilfsmittel aus der Kombinatorik	361
1.1	Permutationen	361
1.2	Kombinationen	362
1.3	Variationen	362
2	Grundbegriffe	363
3	Wahrscheinlichkeit	365
3.1	Absolute und relative Häufigkeit	365
3.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	366
3.3	Laplace-Experimente	366
3.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	367
3.5	Multiplikationssatz	367
3.6	Stochastisch unabhängige Ereignisse	368
3.7	Mehrstufige Zufallsexperimente	368
4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	370
4.1	Zufallsvariable	370
4.2	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	371
4.3	Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung	373
5	Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	375
5.1	Binomialverteilung	375
5.2	Hypergeometrische Verteilung	377
5.3	Poisson-Verteilung	379
5.4	Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)	380

6	Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	381
6.1	Gaußsche Normalverteilung	381
6.1.1	Allgemeine Normalverteilung	381
6.1.2	Standardnormalverteilung	382
6.1.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	383
6.1.4	Quantile der Standardnormalverteilung	384
6.2	Exponentialverteilung	385
7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	386
7.1	Mehrdimensionale Zufallsvariable	386
7.2	Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen	388
7.2.1	Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen	388
7.2.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	389
7.2.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe	389
8	Prüf- und Testverteilungen	390
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung („ X^2 -Verteilung“)	390
8.2	t -Verteilung von Student	392
XV	Grundlagen der mathematischen Statistik	394
1	Grundbegriffe	394
1.1	Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	394
1.2	Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	395
1.3	Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben	397
2	Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	400
2.1	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	400
2.2	Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion	402
2.3	Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	403
3	Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen“)	404
3.1	Aufgaben der Parameterschätzung	404
3.2	Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen“)	404
3.2.1	Schätz- und Stichprobenfunktionen	404
3.2.2	Schätzungen für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2	405
3.2.3	Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	406
3.2.4	Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen	406
3.3	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen“)	407

3.3.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle	407
3.3.2	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert \bar{f}_i einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	408
3.3.3	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert \bar{p}_i einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	409
3.3.4	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert \bar{p}_i bei einer beliebigen Verteilung	410
3.3.5	Vertrauensintervalle für die unbekanntem Varianz σ^2 einer Normalverteilung	411
3.3.6	Vertrauensintervalle für einen unbekanntem Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	412
3.3.7	Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls	413
4	Statistische Prüfverfahren für unbekanntem Parameter („Parametertests“)	414
4.1	Statistische Hypothesen und Parametertests	414
4.2	Spezielle Parametertests	415
4.2.1	Test für den unbekanntem Mittelwert \bar{p}_i einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	415
4.2.2	Test für den unbekanntem Mittelwert \bar{p}_i einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	417
4.2.3	Tests für die Gleichheit der unbekanntem Mittelwerte \bar{p}_{i_1} und \bar{p}_{i_2} zweier Normalverteilungen („Differenzentests“)	418
4.2.3.1	Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben	419
4.2.3.2	Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben	420
4.2.4	Tests für die unbekanntem Varianz σ^2 einer Normalverteilung	424
4.2.5	Tests für den unbekanntem Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	426
4.2.6	Musterbeispiel für einen Parametertest	428
5	Chi-Quadrat-Test	429