

Harald Scheid

Zahlentheorie

3. Auflage

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg • Berlin

OII

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 9

I Teilbarkeit ganzer Zahlen

- 1.1 Die Teiler einer ganzen Zahl 15
- 1.2 Primzahlen 17
- 1.3 Primfaktorzerlegung 22
- 1.4 Eine Formel von Legendre und die Sätze von Tschebyscheff 29
- 1.5 Irrationalitätsbeweise 35
- 1.6 Der größte gemeinsame Teiler 37
- 1.7 Das kleinste gemeinsame Vielfache 40
- 1.8 Kettenbrüche J^6
- 1.9 Periodische Kettenbrüche 56
- 1.10 Farey-Folgen 62
- 1.11 Die Folge der Fibonacci-Zahlen 67
- 1.12 Aufgaben 75
- 1.13 Lösungen der Aufgaben 84

II Integritätsbereiche

- II. 1 Teilbarkeit in Integritätsbereichen 97
- 11.2 Euklidische Ringe 103
- 11.3 Die ganzen gaußschen Zahlen 108
- 11.4 Ganzalgebraische Zahlen zweiten Grades 114
- 11.5 Die pellsche Gleichung 118
- 11.6 Aufgaben 124
- 11.7 Lösungen der Aufgaben 127

III Restklassen

- III. 1 Kongruenzen und Restklassen 133
- 111.2 Teilbarkeitskriterien 135
- 111.3 Der Satz von Fermat 139
- 111.4 Primitive Restklassen 146
- 111.5 Dezimalbrüche 152
- 111.6 Ewiger Kalender 157
- 111.7 Codierung $i5P$
- 111.8 Magische Quadrate $iflg$
- 111.9 Primzahlkriterien und Pseudoprimzahlen 168
- III. 10 Mersennesche und fermatsche Primzahlen (1) 173
- III. 11 Aufgaben 177
- III.12 Lösungen der Aufgaben 183

IV Kongruenzen und diophantische Gleichungen

- IV. 1 Lineare diophantische Gleichungen und Kongruenzen 193
- IV.2 Quadratische diophantische Gleichungen und Kongruenzen 200
- IV.3 Quadratische Reste 202
- IV.4 Mersennesche und fermatsche Primzahlen (2) 211
- IV.5 Darstellung von Zahlen als Quadratsummen 216
- IV.6 Pythagoreische Zahlentripel; die Fermatsche Vermutung 225
- IV.7 Rationale Punkte auf algebraischen Kurven 234
- IV.8 Binäre quadratische Formen 238
- IV.9 Ternäre quadratische Formen; der Drei-Quadrate-Satz 249
- IV.10 Figurierte Zahlen 255
- IV. 11 Der Gitterpunktsatz von Minkowski 258
- IV. 12 Aufgaben 263
- IV. 13 Lösungen der Aufgaben 271

V Zahlentheoretische Funktionen

- V.1 Das Dirichlet-Produkt 283
- V.2 Multiplikative Funktionen 288
- V.3 Dirichlet-Reihen 292
- V.4 Mittelwerte zahlentheoretischer Funktionen 297
- V.5 Weitere Produkte zahlentheoretischer Funktionen 304
- V.6 Die Teilersummenfunktion 309
- V.7 Aufgaben 320
- V.8 Lösungen der Aufgaben 327

VI Der Primzahlsatz

- VI. 1 Der Primzahlsatz und der dirichletsche Primzahlsatz 337
- VI.2 Die selbergsche Formel 339
- VI. 3 Beweis des Primzahlsatzes 344
- VI.4 Anmerkungen, Folgerungen 350
- VI.5 Primzahlen in arithmetischen Progressionen (1) 354
- VI.6 Zufallsprimzahlen und stochastische Argumentationen 367
- VI.7 Aufgaben 373
- VI.8 Lösungen der Aufgaben 375

VII Elemente der Additiven Zahlentheorie

- VII. 1 Problemstellungen der Additiven Zahlentheorie 381
- VII.2 Partitionen 382
- VII.3 Ein spezielles Partitionsproblem 394
- VII.4 Anzahl der Darstellungen als Quadratsummen 402
- VII.5 Die Dichte einer Menge natürlicher Zahlen 409
- VII.6 Der Satz von Goldbach-Schnirelmann
- VII.7 Der Satz von Waring-Hilbert 422

- VII.8 Wesentliche Komponenten
- VII.9 Das Münzenproblem und das Briefmarkenproblem
- VII. 10 Aufgaben 446
- VII. 11 Lösungen der Aufgaben 44%

VIII Siebmethoden

- VIII. 1 Allgemeine Bemerkungen über Siebverfahren
- VIII.2 Die Siebmethode von Seiberg 457
- VIII.3 Primzahlen in arithmetischen Progressionen (2)
- VIII.4 Primzahlzwillinge 4^6
- VIII.5 Zur goldbachschen Vermutung 469
- VIII.6 Quadratsummen und Stammbruchsummen
- VIII.7 Aufgaben 480
- VIII.8 Lösungen der Aufgaben 481
- Literatur 483
- Symbolverzeichnis 489
- Namensverzeichnis
- Sachverzeichnis