

S.L. Salas/Einar Hille

Calculus

Einführung in die
Differential- und Integralrechnung

Aus dem Amerikanischen von
Michael Basler, Thomas Lange und Karl-Heinz Lotze

Mit 670 Abbildungen

Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg • Berlin • Oxford

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einführung	1
1.1	Was ist Calculus?	1
1.2	Bezeichnungen und Formeln der Elementarmathematik	5
1.3	Einige Aufgaben mit Geraden	15
1.4	Ungleichungen	18
1.5	Ungleichungen und absolute Beträge.	22
1.6	Funktionen	26
1.7	Die Verkettung von Funktionen	30
1.8	Eineindeutige Funktionen. Umkehrfunktionen.	35
1.9	Einige Bemerkungen zu mathematischen Beweisen.	41
1.10	Übungsaufgaben.	43
2	Grenzwerte und Stetigkeit	45
2.1	Die Idee des Grenzwertes.	45
2.2	Die Definition des Grenzwertes.	52
2.3	Einige Grenzwertsätze.	63
2.4	Stetigkeit	71
2.5	Der Einzwängungssatz.Trigonometrische Grenzwerte.	79
2.6	Zwei grundlegende Sätze.	85
2.7	Übungsaufgaben.	89
3	Differentiation	91
3.1	Die Ableitung	91
3.2	Einige Ableitungsformeln.	101
3.3	Die d/dx-Schreibweise. Ableitungen höherer Ordnung	110
3.4	Die Ableitung als Änderungsrate.	114
3.5	Geschwindigkeit und Beschleunigung. Freier Fall.	117
3.6	Die Kettenregel.	125
3.7	Die Ableitungen trigonometrischer Funktionen.	132
3.8	Die Ableitungen in verser Funktionen. Gebrochene Potenzen.	136
3.9	Zusätzliche Differentiationsübungen.	140
3.10	Implizites Ableiten.	140

3.11	Änderungsraten pro Zeiteinheit	143
3.12	Differentiale. Newton-Raphson-Approximationen	148
3.13	Übungsaufgaben	153
4	Der Mittelwertsatz und seine Anwendungen	157
4.1	Der Mittelwertsatz	157
4.2	Monoton wachsende und fallende Funktionen	161
4.3	Lokale Extremwerte	168
4.4	Endpunkt- und absolute Extremwerte	175
4.5	Einige Minimax-Probleme	181
4.6	Konkavität. Konvexität. Wendepunkte	185
4.7	Kurvendiskussionen	188
4.8	Vertikale und horizontale Asymptoten. Vertikale Tangenten und Rückkehrpunkte	193
4.9	Weitere Minimax-Aufgaben	198
4.10	Übungsaufgaben	201
5	Integration	202
5.1	Die Berechnung von Flächeninhalten und Wegstrecken	202
5.2	Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion	206
5.3	Die Funktion $F(x) = \int f(t)dt$	212
5.4	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	219
5.5	Beispiele zur Berechnung von Flächeninhalten	223
5.6	Unbestimmte Integrale	229
5.7	Beispielaufgaben mit bewegten Objekten	231
5.8	Variablensubstitution	234
5.9	Integration von Winkelfunktionen	240
5.10	Weitere Eigenschaften bestimmter Integrale	245
5.11	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung	247
5.12	Das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen	251
5.13	Übungsaufgaben	253
6	Einige Anwendungen des Integrals	257
6.1	Nochmals zum Flächeninhalt	257
6.2	Volumenberechnung durch parallele Querschnitte. Scheiben und Ringe	261
6.3	Volumenberechnung nach der Schalenmethode	268
6.4	Der geometrische Mittelpunkt einer Fläche. Der Volumensatz von Pappos	273
6.5	Der Begriff Arbeit	279
6.6	Die Kraft auf einen Damm	284
6.7	Das Gravitationsgesetz von Newton	287
6.8	Übungsaufgaben	291

7	Transzendente Funktionen	293
7.1	Der Logarithmusbegriff	293
7.2	Die Logarithmusfunktion, Teil I.	296
7.3	Die Logarithmusfunktion, Teil II.	302
7.4	Die Exponentialfunktion.	308
7.5	Beliebige Potenzen, andere Basen und eine Abschätzung für e	317
7.6	Exponentielles Anwachsen und Abfallen. Zinseszins.	324
7.7	Partielle Integration.	332
7.8	Die einfache harmonische Bewegung	338
7.9	Nochmals zur Integration trigonometrischer Funktionen	345
7.10	Die inversen trigonometrischen Funktionen.	348
7.11	Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus.	357
7.12	Die anderen Hyperbelfunktionen.	351
7.13	Übungsaufgaben.	365
8	Integrationstechniken	370
8.1	Wiederholung	370
8.2	Partialbrüche.	372
8.3	Potenzen und Produkte von Sinus und Kosinus.	381
8.4	Potenzen trigonometrischer Funktionen.	384
8.5	Integrale, die $Va^2 \pm x^2$ und $Vx^2 \pm a^2$ enthalten.	387
8.6	Einige rationalmachende Substitutionen.	390
8.7	Numerische Integration.	391
8.8	Übungsaufgaben.	399
9	Kegelschnitte	400
9.1	Einleitung	400
9.2	Translationen. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden	401
9.3	Die Parabel.	404
9.4	Die Ellipse.	412
9.5	Die Hyperbel.	418
9.6	Drehungen. Eliminieren des xy -Terms.	423
9.7	Übungsaufgaben	429
10	Polarkoordinaten. Parametergleichungen	431
10.1	Polarkoordinaten.	431
10.2	Grafische Darstellungen in Polarkoordinaten.	438
10.3	Die Kegelschnitte in Polarkoordinaten.	444
10.4	Schnitte von Polarkurven.	447
10.5	Der Flächeninhalt in Polarkoordinaten	450
10.6	Parametrisch gegebene Kurven.	454
10.7	Tangenten an parametrisch gegebene Kurven.	460

10.8	Das Axiom der kleinsten oberen Schranke	465
10.9	Bogenlänge und Schnelligkeit	469
10.10	Der Inhalt einer Rotationsfläche. Der geometrische Mittelpunkt einer Kurve. Der Satz von Pappos über den Oberflächeninhalt	477
10.11	Die Zykloide	491
10.12	Übungsaufgaben	491
11	Folgen. Unbestimmte Ausdrücke. Uneigentliche Integrale	496
11.1	Folgen reeller Zahlen	496
11.2	Der Grenzwert einer Folge	501
11.3	Einige wichtige Grenzwerte	512
11.4	Der unbestimmte Ausdruck $(0/0)$	515
11.5	Der unbestimmte Ausdruck (∞/∞)	520
11.6	Uneigentliche Integrale	522
11.7	Übungsaufgaben	528
12	Unendliche Reihen	532
12.1	Das Summenzeichen	532
12.2	Unendliche Reihen	534
12.3	Ein Integralkriterium und Vergleichskriterien	543
12.4	Wurzelkriterium und Quotientenkriterium	551
12.5	Absolute und bedingte Konvergenz. Alternierende Reihen.	556
12.6	Taylor-Polynome und Taylor-Reihen in x	561
12.7	Taylor-Polynome und Taylor-Reihen in $x - a$	573
12.8	Potenzreihen	576
12.9	Differentiation und Integration von Potenzreihen	582
12.10	Die Binomialreihe	596
12.11	Übungsaufgaben	598
13	Vektoren	601
13.1	Kartesische Ortskoordinaten	601
13.2	Verschiebungen und Kräfte	604
13.3	Vektoren	609
13.4	Das Skalarprodukt	617
13.5	Matrizen und Determinanten	629
13.6	Das Vektorprodukt	632
13.7	Geraden	641
13.8	Ebenen	650
13.9	Etwas Geometrie mit vektoriiellen Methoden	661
13.10	Übungsaufgaben	663

14 Vektor-Differential- und -Integralrechnung	667
14.1 Vektorfunktionen	667
14.2 Ableitungsformeln	674
14.3 Kurven	679
14.4 Die Bogenlänge	688
14.5 Krummlinige Bewegung. Vektor-Differentialrechnung in der Mechanik	694
14.6 Die Planetenbewegung	707
14.7 Krümmung	713
14.8 Übungsaufgaben	721
15 Funktionen mehrerer Variabler	727
15.1 Einige elementare Beispiele	727
15.2 Ein Überblick über Flächen zweiter Ordnung. Projektionen	731
15.3 Grafische Darstellungen. Höhenlinien und Niveauflächen	739
15.4 Partielle Ableitungen	746
15.5 Offene und abgeschlossene Mengen	753
15.6 Grenzwerte und Stetigkeit. Die Gleichheit gemischter partieller Ableitungen	757
15.7 Übungsaufgaben	764
16 Gradienten. Extremwerte. Differentiale	767
16.1 Differenzierbarkeit und Gradient	767
16.2 Gradienten und Richtungsableitungen	775
16.3 Der Mittelwertsatz. Zwei Zwischenwertsätze	784
16.4 Kettenregeln	788
16.5 Der Gradient als Normale. Tangenten und Tangentialebenen	795
16.6 Maxima und Minima	805
16.7 Das Kriterium der zweiten partiellen Ableitung	814
16.8 Maxima und Minima mit Nebenbedingungen	819
16.9 Differentiale	827
16.10 Die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrem Gradienten	832
16.11 Übungsaufgaben	839
17 Doppel- und Dreifachintegrale	842
17.1 Mehrfachsummen	842
17.2 Das Doppelintegral über ein Rechteck	845
17.3 Das Doppelintegral über einen Bereich	854
17.4 Die Berechnung von Doppelintegralen durch mehrfache Integration	858
17.5 Das Doppelintegral als Grenzwert Riemannscher Summen. Polarkoordinaten	872

XII Inhaltsverzeichnis

17.6	Einige Anwendungen von Doppelintegralen.	880
17.7	Dreifachintegrale.	886
17.8	Zurückführen auf Mehrfachintegrale.	892
17.9	Zylinderkoordinaten.	899
17.10	Das Dreifachintegral als Grenzwert Riemannscher Summen. Kugelkoordinaten.	904
17.11	Die Jacobi-Determinante. Variablensubstitution in Mehrfachintegralen.	911
17.12	Übungsaufgaben.	917
18	Kurven- und Oberflächenintegrale	919
18.1	Kurvenintegrale.	919
18.2	Der Hauptsatz für Kurvenintegrale.	928
18.3	Arbeit und Energie. Der Energieerhaltungssatz der Mechanik.	931
18.4	Eine andere Schreibweise. Kurvenintegrale bezüglich der Bogenlänge.	934
18.5	Der Greensche Satz.	938
18.6	Parameterdarstellung von Flächen. Der Flächeninhalt.	948
18.7	Oberflächenintegrale.	960
18.8	Der Vektordifferentialoperator ∇	970
18.9	Der Gaußsche Satz.	977
18.10	Der Stokessche Satz.	984
18.11	Übungsaufgaben.	991
Anhang A.	Einige elementare Themen	994
A.1	Mengen.	994
A.2	Das Bogenmaß.	998
A.3	Die vollständige Induktion.	1001
Anhang B.	Einige zusätzliche Beweise	1004
B.1	Der Mittelwertsatz.	1004
B.2	Der Maximum-Minimum-Satz.	1005
B.3	Umkehrfunktionen.	1006
B.4	Integrierbarkeit stetiger Funktionen.	1008
B.5	Das Integral als Grenzwert Riemannscher Summen.	1012
Sachverzeichnis		1013