

Jürgen Tietze

# **Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik**

11., verbesserte Auflage

Mit 500 Abbildungen und 1300 Übungsaufgaben



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	<b>V</b>
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	<b>XV</b>
<b>Abkürzungen, Variablennamen, griechisches Alphabet</b> . . . .	<b>XVI</b>
<b>1 Grundlagen und Hilfsmittel</b> .....	<b>I-I</b>
1.1 Mengen und Aussagen .....	1-1
1.1.1 Mengenbegriff .....	1-1
1.1.2 Spezielle Zahlenmengen .....	1-3
1.1.3 Aussagen und Aussageformen .....	1-5
1.1.4 Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen .....	1-9
1.1.4.1 Konjunktion .....	1-9
1.1.4.2 Disjunktion .....	1-10
1.1.4.3 Negation .....	1-11
1.1.4.4 Zusammengesetzte Aussagen .....	1-11
1.1.5 Folgerung (Implikation) und Äquivalenz .....	1-14
1.1.5.1 Folgerung (Implikation) .....	1-14
1.1.5.2 Äquivalenz .....	1-16
1.1.6 Relationen zwischen Mengen .....	1-17
1.1.6.1 Gleichheit zweier Mengen .....	1-17
1.1.6.2 Teilmengen .....	1-17
1.1.7 Verknüpfungen (Operationen) mit Mengen .....	1-18
1.1.7.1 Durchschnittsmenge .....	1-18
1.1.7.2 Vereinigungsmenge .....	1-18
1.1.7.3 Restmenge (Differenzmenge) .....	1-19
1.1.8 Paarmengen, Produktmengen .....	1-21
1.2 Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen .....	1-23
1.2.1 Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln in $\mathbb{R}$ .....	1-23
1.2.1.1 Axiome .....	1-23
1.2.1.2 Elementare Rechenregeln für reelle Zahlen ...	1-26
1.2.1.3 Betrag einer Zahl .....	1-31
1.2.1.4 Das Summenzeichen .....	1-32
1.2.1.5 Das Produktzeichen .....	1-35
1.2.1.6 Fakultät und Binomialkoeffizient .....	1-35
1.2.2 Potenzen .....	1-37
1.2.2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten .....	1-37
1.2.2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .....	1-40
1.2.2.3 Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten; Wurzeln .....	1-41

1.2.2.4	Potenzen mit reellen Exponenten . . . . .	1-44
1.2.3	Logarithmen . . . . .	1-46
1.2.3.1	Begriff des Logarithmus . . . . .	1-46
1.2.3.2	Logarithmenbasen . . . . .	1-47
1.2.3.3	Rechenregeln für Logarithmen . . . . .	1-48
1.2.3.4	Logarithmen zu beliebiger Basis . . . . .	1-50
1.2.4	Gleichungen . . . . .	1-51
1.2.4.1	Allgemeines über Gleichungen und deren Lösungen . . . . .	1-51
1.2.4.2	Äquivalenzumformungen . . . . .	1-54
1.2.4.3	Lineare Gleichungen $ax + b = ex + d$ . . . . .	1-58
1.2.4.4	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	1-59
1.2.4.5	Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ . . . . .	1-63
1.2.4.6	Gleichungen höheren als zweiten Grades . . . . .	1-67
1.2.4.7	Wurzelgleichungen . . . . .	1-70
1.2.4.8	Exponentialgleichungen . . . . .	1-71
1.2.4.9	Logarithmengleichungen . . . . .	1-72
1.2.4.10	Bruchgleichungen . . . . .	1-73
1.2.5	Ungleichungen . . . . .	1-74
1.2.6	Wo steckt der Fehler? . . . . .	1-78
1.2.6.1	Fehler bei Termumformungen . . . . .	1-78
1.2.6.2	Fehler bei der Lösung von Gleichungen . . . . .	1-80
1.2.6.3	Fehler bei der Lösung von Ungleichungen . . . . .	1-82
<b>2</b>	<b>Funktionen einer unabhängigen Variablen . . . . .</b>	<b>2-1</b>
2.1	Begriff und Darstellung von Funktionen . . . . .	2-1
2.1.1	Funktionsbegriff . . . . .	2-1
2.1.2	Graphische Darstellung von Funktionen . . . . .	2-6
2.1.3	Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	2-11
2.1.4	Umkehrfunktionen . . . . .	2-14
2.1.5	Implizite Funktionen . . . . .	2-19
2.1.6	Verkettete Funktionen . . . . .	2-20
2.2	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	2-22
2.2.1	Beschränkte Funktionen . . . . .	2-22
2.2.2	Monotone Funktionen . . . . .	2-23
2.2.3	Symmetrische Funktionen . . . . .	2-24
2.2.4	Nullstellen von Funktionen . . . . .	2-25
2.3	Elementare Typen von Funktionen . . . . .	2-26
2.3.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	2-26
2.3.1.1	Grundbegriffe, Horner-Schema . . . . .	2-26
2.3.1.2	Konstante und lineare Funktionen . . . . .	2-28
2.3.1.3	Quadratische Funktionen . . . . .	2-35
2.3.1.4	Nullstellen von Polynomen und Polynomzerlegung . . . . .	2-38
2.3.2	Gebrochen-rationale Funktionen . . . . .	2-41
2.3.3	Algebraische Funktionen (Wurzelfunktionen) . . . . .	2-43

2.3.4	Exponentialfunktionen . . . . .	2-46
2.3.5	Logarithmusfunktionen. . . . .	2-48
2.3.6	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen, Winkelfunktionen). . . . .	2-49
2.4	Iterative Gleichungslösung und Nullstellenbestimmung (Regula falsi). . . . .	2-55
2.5	Beispiele ökonomischer Funktionen . . . . .	2-59
<b>3</b>	<b>Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen. . . . .</b>	<b>3-1</b>
3.1	Begriff von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen .	3-1
3.2	Darstellung einer Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	3-2
3.3	Homogenität von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen . . . . .	3-13
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen. . . . .</b>	<b>4-1</b>
4.1	Der Grenzwertbegriff . . . . .	4-1
4.1.1	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ . . . . .	4-2
4.1.2	Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$ ) ..	4-6
4.2	Grenzwerte spezieller Funktionen. . . . .	4-13
4.3	Die Grenzwertsätze und ihre Anwendungen. . . . .	4-15
4.4	Der Stetigkeitsbegriff. . . . .	4-20
4.5	Unstetigkeitstypen. . . . .	4-22
4.6	Stetigkeitsanalyse. . . . .	4-24
4.7	Stetigkeit ökonomischer Funktionen. . . . .	4-27
4.8	Asymptoten. . . . .	4-30
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen - Grundlagen und Technik. . . . .</b>	<b>5-1</b>
5.1	Grundlagen der Differentialrechnung. . . . .	5-1
5.1.1	Problemstellung . . . . .	5-1
5.1.2	Durchschnittliche Funktionssteigung (Sekantensteigung) und Differenzenquotient . . . . .	5-2
5.1.3	Steigung und Ableitung einer Funktion (Differentialquotient). . . . .	5-3
5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	5-7
5.2	Technik des Differenzierens. . . . .	5-9
5.2.1	Die Ableitung der Grundfunktionen. . . . .	5-9
5.2.1.1	Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = C$ ...	5-9
5.2.1.2	Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ . . . . .	5-10
5.2.1.3	Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ...	5-12
5.2.1.4	Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ .	5-12
5.2.2	Ableitungsregeln. . . . .	5-14
5.2.2.1	Faktorregel. . . . .	5-14
5.2.2.2	Summenregel. . . . .	5-15
5.2.2.3	Produktregel. . . . .	5-16

5.2.2.4	Quotientenregel . . . . .	5-17
5.2.2.5	Kettenregel . . . . .	5-19
5.2.3	Ergänzungen zur Ableitungstechnik . . . . .	5-23
5.2.3.1	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	5-23
5.2.3.2	Ableitung allgemeiner Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	5-24
5.2.3.3	Logarithmische Ableitung . . . . .	5-27
5.2.4	Höhere Ableitungen . . . . .	5-28
5.2.5	Zusammenfassung der wichtigsten Differentiationsregeln	5-30
5.3	Grenzwerte bei unbestimmten Ausdrücken - Regeln von de L'Hôpital . . . . .	5-31
5.4	Newton-Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von Nullstellen einer Funktion . . . . .	5-39

**Anwendungen der Differentialrechnung bei Funktionen  
mit einer unabhängigen Variablen. . . . . 6-1**

6.1	Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung . . . . .	6-1
6.1.1	Das Differential einer Funktion . . . . .	6-1
6.1.2	Die Interpretation der 1. Ableitung als (ökonomische) Grenzfunktion . . . . .	6-4
6.1.2.1	Grenzkosten . . . . .	6-6
6.1.2.2	Grenzerlös (Grenzumsatz, Grenzausgaben) . . . . .	6-7
6.1.2.3	Grenzproduktivität (Grenzertrag) . . . . .	6-9
6.1.2.4	Grenzwinn . . . . .	6-10
6.1.2.5	Marginale Konsumquote . . . . .	6-12
6.1.2.6	Marginale Sparquote . . . . .	6-12
6.1.2.7	Grenzrate der Substitution . . . . .	6-13
6.1.2.8	Grenzfunktion und Durchschnittsfunktion . . . . .	6-14
6.2	Anwendung der Differentialrechnung auf die Untersuchung von Funktionen . . . . .	6-18
6.2.1	Monotonie- und Krümmungsverhalten . . . . .	6-18
6.2.2	Extremwerte . . . . .	6-22
6.2.3	Wendepunkte . . . . .	6-26
6.2.4	Kurvendiskussion . . . . .	6-28
6.2.5	Extremwerte bei nichtdifferenzierbaren Funktionen . . . . .	6-33
6.3	Die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Probleme . . . . .	6-36
6.3.1	Beschreibung ökonomischer Prozesse mit Hilfe von Ableitungen . . . . .	6-36
6.3.1.1	Beschreibung des Wachstumsverhaltens ökonomischer Funktionen . . . . .	6-37
6.3.1.2	Konstruktion ökonomischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften . . . . .	6-40
6.3.2	Analyse und Optimierung ökonomischer Funktionen . . . . .	6-42
6.3.2.1	Fahrstrahlanalyse . . . . .	6-43
6.3.2.2	Diskussion ökonomischer Funktionen . . . . .	6-46

6.3.2.3	Gewinnmaximierung	6-48
6.3.2.4	Gewinnmaximierung bei doppelt-geknickter Preis-Absatz-Funktion	6-55
6.3.2.5	Optimale Lagerhaltung	6-57
6.3.3	Die Elastizität ökonomischer Funktionen	6-67
6.3.3.1	Änderungen von Funktionen	6-67
6.3.3.2	Begriff, Bedeutung und Berechnung der Elastizität von Funktionen	6-69
6.3.3.3	Elastizität ökonomischer Funktionen	6-75
6.3.3.4	Graphische Ermittlung der Elastizität	6-82
6.3.4	Überprüfung ökonomischer Gesetzmäßigkeiten mit Hilfe der Differentialrechnung	6-86
<b>7</b>	<b>Differentialrechnung bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen</b>	<b>7-1</b>
7.1	Grundlagen	7-1
7.1.1	Begriff und Berechnung von partiellen Ableitungen	7-1
7.1.2	Ökonomische Interpretation partieller Ableitungen	7-7
7.1.3	Partielle Ableitung höherer Ordnung	7-9
7.1.4	Kennzeichnung von Monotonie und Krümmung durch partielle Ableitungen	7-10
7.1.5	Partielles und vollständiges (totales) Differential	7-12
7.1.6	Kettenregel, totale Ableitung	7-15
7.1.7	Ableitung impliziter Funktionen	7-19
7.2	Extrema bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	7-23
7.2.1	Relative Extrema ohne Nebenbedingungen	7-23
7.2.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	7-25
7.2.2.1	Problemstellung	7-25
7.2.2.2	Variablensubstitution	7-27
7.2.2.3	Lagrange-Methode	7-28
7.3	Beispiele für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	7-31
7.3.1	Partielle Elastizitäten	7-32
7.3.1.1	Begriff der partiellen Elastizität	7-32
7.3.1.2	Die Eulersche Homogenitätsrelation	7-33
7.3.1.3	Elastizität homogener Funktionen	7-34
7.3.1.4	Faktorentlohnung und Verteilung des Produktes	7-37
7.3.2	Ökonomische Beispiele für relative Extrema (ohne Nebenbedingungen)	7-43
7.3.2.1	Optimaler Faktoreinsatz in der Produktion	7-43
7.3.2.2	Gewinnmaximierung von Mehrproduktunternehmungen	7-47
7.3.2.3	Gewinnmaximierung bei räumlicher Preisdifferenzierung	7-52

	7.3.2.4	Die Methode der kleinsten Quadrate. . . . .	7-56
7.3.3		Ökonomische Beispiele für Extrema unter Nebenbedingungen. . . . .	7-59
	7.3.3.1	Minimalkostenkombination. . . . .	7-59
	7.3.3.2	Expansionspfad, Faktornachfrage- und Gesamtkostenfunktion. . . . .	7-66
	7.3.3.3	Nutzenmaximierung und Haushaltsoptimum ...	7-70
	7.3.3.4	Nutzenmaximale Güternachfrage- und Konsumfunktionen. . . . .	7-77
<b>8</b>		<b>Einführung in die Integralrechnung . . . . .</b>	<b>8-1</b>
8.1		Das unbestimmte Integral. . . . .	8-1
	8.1.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral. . . . .	8-1
	8.1.2	Grundintegrale. . . . .	8-4
	8.1.3	Elementare Rechenregeln für das unbestimmte Integral	8-5
8.2		Das bestimmte Integral. . . . .	8-7
	8.2.1	Das Flächeninhaltsproblem und der Begriff des bestimmten Integrals. . . . .	8-7
	8.2.2	Beispiel zur elementaren Berechnung eines bestimmten Integrals. . . . .	8-10
	8.2.3	Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals ...	8-11
8.3		Beziehungen zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	8-12
	8.3.1	Integralfunktion. . . . .	8-12
	8.3.2	Der 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-13
	8.3.3	Der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	8-15
	8.3.4	Flächeninhaltsberechnung . . . . .	8-17
8.4		Spezielle Integrationstechniken. . . . .	8-19
	8.4.1	Partielle Integration. . . . .	8-19
	8.4.2	Integration durch Substitution. . . . .	8-21
8.5		Ökonomische Anwendungen der Integralrechnung. . . . .	8-23
	8.5.1	Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen. . . . .	8-23
	8.5.2	Die Konsumentenrente. . . . .	8-26
	8.5.3	Die Produzentenrente. . . . .	8-28
	8.5.4	Kontinuierliche Zahlungsströme. . . . .	8-29
	8.5.5	Kapitalstock und Investitionen einer Volkswirtschaft ...	8-33
	8.5.6	Optimale Nutzungsdauer von Investitionen. . . . .	8-34
8.6		Elementare Differentialgleichungen. . . . .	8-38
	8.6.1	Einleitung. . . . .	8-38
	8.6.2	Lösung von Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen. . . . .	8-39
	8.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differentialgleichungen. . . . .	8-42
		8.6.3.1 Exponentielles Wachstum. . . . .	8-42
		8.6.3.2 Funktionen mit vorgegebener Elastizität . . . . .	8-42
		8.6.3.3 Neoklassisches Wachstumsmodell nach Solow . . . . .	8-44

<b>9</b>	<b>Einführung in die Lineare Algebra</b> . . . . .	<b>9-1</b>
9.1	Matrizen und Vektoren. . . . .	9-1
9.1.1	Grundbegriffe der Matrizenrechnung . . . . .	9-1
9.1.2	Spezielle Matrizen und Vektoren. . . . .	9-6
9.1.3	Operationen mit Matrizen. . . . .	9-7
9.1.3.1	Addition von Matrizen. . . . .	9-7
9.1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalarfaktor. . . . .	9-9
9.1.3.3	Die skalare Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt). . . . .	9-11
9.1.3.4	Multiplikation von Matrizen. . . . .	9-12
9.1.4	Die inverse Matrix. . . . .	9-19
9.1.5	Ökonomisches Anwendungsbeispiel (Input-Output-Analyse). . . . .	9-21
9.2	Lineare Gleichungssysteme (LGS). . . . .	9-26
9.2.1	Grundbegriffe. . . . .	9-26
9.2.2	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme - Gaußscher Algorithmus. . . . .	9-28
9.2.3	Pivotisieren. . . . .	9-35
9.2.4	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme. . . . .	9-40
9.2.5	Berechnung der Inversen einer Matrix. . . . .	9-45
9.2.6	Ökonomische Anwendungsbeispiele für lineare Gleichungssysteme. . . . .	9-48
9.2.6.1	Teilebedarfsrechnung, Stücklistenauflösung . . . . .	9-48
9.2.6.2	Innerbetriebliche Leistungsverrechnung . . . . .	9-50
<b>10</b>	<b>Lineare Optimierung (LO)</b> . . . . .	<b>10-1</b>
10.1	Grundlagen und graphische Lösungsmethode. . . . .	10-1
10.1.1	Ein Problem der Produktionsplanung . . . . .	10-1
10.1.2	Graphische Lösung des Produktionsplanungsproblems .. . . .	10-2
10.1.3	Ein Diät-Problem . . . . .	10-4
10.1.4	Graphische Lösung des Diät-Problems. . . . .	10-5
10.1.5	Sonderfälle bei graphischer Lösung . . . . .	10-7
10.1.6	Graphische Lösung von LO-Problemen - Zusammenfassung . . . . .	10-10
10.2	Simplexverfahren . . . . .	10-12
10.2.1	Mathematisches Modell des allgemeinen LO-Problems . . . . .	10-12
10.2.2	Grundidee des Simplexverfahrens. . . . .	10-14
10.2.3	Einführung von Schlupfvariablen. . . . .	10-14
10.2.4	Eckpunkte und Basislösungen. . . . .	10-15
10.2.5	Optimalitätskriterium. . . . .	10-17
10.2.6	Engpaßbedingung . . . . .	10-19
10.2.7	Simplexverfahren im Standard-Maximum-Fall - Zusammenfassung . . . . .	10-20
10.2.8	Beispiel zum Simplexverfahren (Standard-Maximum-Problem). . . . .	10-21



10.3	Zweiphasenmethode zur Lösung beliebiger LO-Probleme . . . . .	10-24
10.4	Sonderfälle bei LO-Problemen . . . . .	10-31
10.4.1	Keine zulässige Lösung . . . . .	10-31
10.4.2	Keine endliche optimale Lösung (unbeschränkte Lösung) . . . . .	10-32
10.4.3	Degeneration (Entartung) . . . . .	10-32
10.4.4	Mehrdeutige optimale Lösungen . . . . .	10-34
10.4.5	Fehlen von Nichtnegativitätsbedingungen . . . . .	10-36
10.4.6	Ablaufdiagramm des Simplexverfahrens im allgemeinen Fall . . . . .	10-37
10.5	Die ökonomische Interpretation des optimalen Simplextableaus . . . . .	10-38
10.5.1	Produktionsplanungsproblem . . . . .	10-38
10.5.1.1	Problemformulierung, Einführung von Einheiten . . . . .	10-38
10.5.1.2	Optimalltableau und optimale Basislösung . . . . .	10-40
10.5.1.3	Deutung der Zielfunktionskoeffizienten . . . . .	10-41
10.5.1.4	Deutung der inneren Koeffizienten . . . . .	10-42
10.5.1.5	Zusammenfassung . . . . .	10-44
10.5.2	Diätproblem . . . . .	10-44
10.6	Dualität . . . . .	10-46
10.6.1	Das duale LO-Problem . . . . .	10-46
10.6.2	Dualitätssätze . . . . .	10-48
10.7	Ökonomische Interpretation des Dualproblems . . . . .	10-51
10.7.1	Dual eines Produktionsplanungsproblems . . . . .	10-52
10.7.2	Dual eines Diätproblems . . . . .	10-53
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>11-1</b>
<b>12</b>	<b>Sachwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>12-1</b>