

Robert Müller-Fonfara  
Wolfgang Scholl

# Mathematik verständlich

Arithmetik und lineare Algebra  
Mengenoperationen  
Gleichungen und Ungleichungen  
Ebene und räumliche Geometrie  
Vektorrechnung  
Kaufmännisches Rechnen  
Differential- und Integralrechnung  
Statistik  
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bassermann



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	13
<b>Algebraische Grundlagen</b>	15
<b>Mengen und Mengenoperationen</b>	15
<b>Logische Grundlagen</b>	24
<b>Zahlenbereiche</b>	34
Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen	35
Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen	43
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, Bruchzahlen	48
Rechenoperationen mit rationalen Zahlen, Bruchrechnen	58
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen	65
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen	79
<b>Terme, Gleichungen und Ungleichungen</b>	94
Termumformungen	94
Umformungen von Bruchtermen	103
Gleichungen und Ungleichungen	109
<b>Abbildungen, Relationen und Funktionen</b>	114
<b>Allgemeine Betrachtungen</b>	114
Der Abbildungsbegriff, Relationen	114
Typen von Funktionen	117
Eigenschaften von Funktionen	123
<b>Proportionale und antiproportionale Funktionen; Dreisatz</b>	133
<b>Prozent-, Promille-, Zins- und Zinseszinsrechnung</b>	140
<b>Lineare Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen</b>	150
<b>Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme</b>	159
<b>Quadratische Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen</b>	165
<b>Potenz- und Wurzelfunktionen, Gleichungen n-ten Grade und Wurzelgleichungen</b>	183
<b>Exponential und Logarithmusfunktionen und -gleichungen</b>	193
<b>Spezielle Gleichungen und Ungleichungen</b>	204
Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	204
Betragsgleichungen und Betragsungleichungen	209

<b>Ebene Geometrie</b>	212
<b>Geometrische Grundbegriffe</b>	212
<b>Koordinatensysteme</b>	218
<b>Geometrische Grundkonstruktionen</b>	220
<b>Ebene Figuren (Flächen)</b>	230
Dreiecke	230
Vierecke	241
Polygone oder n-Ecke	249
Kreise	254
Ellipsen	266
<b>Kongruenzabbildungen</b>	272
Symmetrische Figuren	272
Geradenspiegelungen	274
Verschiebungen	275
Drehungen	277
Zusammenfassung	279
<b>Ähnlichkeitsabbildungen</b>	282
<b>Affine Abbildungen</b>	293
Die axiale Affinität	293
Die Schrägspiegelung	296
Spezialfälle der Verknüpfung axialer Affinitäten	296
<b>Trigonometrie</b>	298
Definitionen	298
Berechnung in beliebigen Dreiecken	301
Die trigonometrischen Funktionen bei beliebigen Winkeln	304
Das Bogenmaß	308
Arcusfunktionen	309
Zum Gebrauch des Taschenrechners	311
Eigenschaften trigonometrischer Funktionen	314
Additionstheoreme	318
Die Funktion $y = a \cdot \sin (bx + c) + d$	320

<b>Stereometrie (Körpermessung)</b>	328
Zeichnen geometrischer Körper	329
Prismen	332
Zylinder	336
Pyramiden und Kegel	340
Pyramidenstümpfe und Kegelstümpfe	344
Regelmäßige Polyeder	352
Kugeln und Kugelteile	354
Beliebig geformte Körper	360
<b>Differentialrechnung</b>	365
<b>Funktionen und Grenzwerte</b>	366
Folgen als Funktionen auf $\mathbb{N}$	366
Grenzwerte von Folgen; Grenzwertsätze	370
Verhalten von Funktionen für $ x  \rightarrow \infty$	375
Grenzwerte von Funktionen für $x \rightarrow x_0$ , Stetigkeit und stetige Ergänzung	377
Der verallgemeinerte Asymptotenbegriff	382
Vollständige Induktion und Reihensummen	383
<b>Die Steigung einer Funktion</b>	391
Das Tangentenproblem	391
Graphische Differentiation	393
Differentialquotient, Ableitungsfunktion und höhere Ableitungen	394
Ein grenzwertfreier Einstieg	396
<b>Die Ableitung der ganzrationalen Funktion</b>	398
Die Potenzregel für $n \in \mathbb{N}$	399
Die Summenregel	399
Die Faktorregel und die Produktregel	400
Steigungsverhalten und Extremwerte	402
Krümmungsverhalten und Wendepunkte	406

<b>Anwendungen</b>	408
Die Kurvendiskussion	408
Bestimmung einer ganzrationalen Funktion aus vorgegebenen Eigenschaften	410
Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	411
<b>Die Ableitung der gebrochen rationalen Funktion</b>	414
Die Quotientenregel	415
Die Diskussion der gebrochen rationalen Funktion	416
<b>Zur Ableitung weiterer Funktionen</b>	418
Die Kettenregel	418
Die Ableitung der Umkehrfunktion	419
Allgemeine algebraische Relationen und Funktionen	420
Zur Ableitung von Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion	422
Zu den trigonometrischen Funktionen und Arcusfunktionen	423
<b>Integralrechnung</b>	426
<b>Geometrische Aspekte der Integralrechnung</b>	428
Riemann-Summen	428
Das bestimmte Integral und seine Eigenschaften	431
Bestimmtes Integral und Flächeninhalt	433
Die Integralfunktion und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	436
<b>Die Integration als Umkehrung der Differentiation</b>	440
Die Stammfunktion	440
Die Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion	440
Graphische Integration	441
Die Integration von Hyperbelfunktionen	442
Die Integrale von Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen und Winkelfunktionen	443
<b>Weitere Integrationsmethoden</b>	445
Die partielle Integration	445
Die Integration durch Substitution	447
Die Integration durch Partialbruchzerlegung	450
Uneigentliche Integrale	451
Volumenbestimmung durch Integration	453

<b>Numerische Verfahren, Differentialgleichungen</b>	458
<b>Numerische Verfahren der Analysis</b>	458
Das Problem der Nullstellenbestimmung	458
Die Regula falsi und das Newton-Verfahren	460
Das Interpolationsproblem	464
Verschiedene Interpolationsmethoden	465
Approximation an einer Stelle	468
Integration mit Hilfe der Interpolation	469
Die Trapezregel und die Simpsonregel	470
<b>Differentialgleichungen</b>	476
Typen von Differentialgleichungen	477
Zum Richtungsfeld und Anfangswertproblem	478
Die Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ und ihre Spezialfälle	481
Die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	486
Auf $y' = f(x) \cdot g(y)$ zurückföhrbare Fälle	489
Systeme von Differentialgleichungen	491
Die Phasenebene als Darstellungsmittel	496
Das Räuber-Beute-Modell	497
Zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen	500
<b>Analytische Geometrie und lineare Algebra</b>	509
Darstellung von Vektoren	511
Vektoraddition und $s$ -Multiplikation	515
Vektorraum	520
Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension	524
Determinanten und Matrizen	532
Systeme linearer Gleichungen	539
Teilverhältnisse	547
Geradengleichungen	550
Ebenengleichungen	558
Skalarprodukt	565
Normalenformen, Hessesche Normalenform	574
Vektorprodukt	580
Kreis und Kugel	584

<b>Kombinatorik, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	591
<b>Kombinatorik</b>	592
Produktregel der Kombinatorik	593
Summenregel der Kombinatorik	595
Permutationen	596
Kombinationen	600
Variationen	602
<b>Beschreibende Statistik</b>	606
Stichproben, Darstellungsweisen, Häufigkeiten	606
Kennwerte von Stichproben	613
Lineare Regression, linearer Schätzwert und Korrelationskoeffizient	618
<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	627
Zufallsexperimente und Ereignismengen	627
Wahrscheinlichkeit	631
Mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme und Pfadregeln	639
Bedingte Wahrscheinlichkeit	646
Monte-Carlo-Methode	651
<b>Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung</b>	657
Definitionen von Variable und Verteilung	657
Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen	660
Die Tschebyscheff-Ungleichung	663
Die Variable $Y = aX + b$	665
Summe und Produkt von Zufallsvariablen	667
<b>Spezielle Verteilungen</b>	672
Die Binomialverteilung	672
Die Poisson-Verteilung	677
Die Normalverteilung	680
Die Hypergeometrische Verteilung	685
<b>Beurteilende Statistik</b>	690
Signifikanztest und Testfehler	691
Der zweiseitige Signifikanztest	692
Der einseitige Signifikanztest	694
Parameterschätzung und Vertrauensintervalle	696
Graphischer Test auf Normalverteilung	700
Der Chi-Quadrat-Test	703

<b>Lösungen</b>	709
<b>Anhang</b>	851
Das deutsche und das griechische Alphabet	851
Mathematische Zeichen	851
Algebraische Strukturen	853
Zahlensysteme	854
Fakultäten	854
Teilbarkeitsregeln	855
Teilmengen	856
Primfaktoren	862
Potenzen	862
Primzahlen zwischen 1 und 10.000	863
Maßeinheiten	865
Pythagoräische Zahlentripel	868
Winkelumrechnung	868
Die Sinus- und Kosinuswerte	870
Die Tangens- und Kotangenswerte	872
Die Binomialkoeffizienten	874
Tabelle der Zufallsziffern	875
Gaußfunktion	877
Gaußsche Summenfunktion	878
Binomialverteilung (Wahrscheinlichkeitsfunktion)	879
Binomialverteilung (Summenfunktion)	881
Schranken für Chi-Quadrat bei $f$ Freiheitsgraden	888
Poisson-Verteilung	889
Student-(t)-Verteilung	891
<b>Register</b>	892