

Paulo Ribenboim

# Die Welt der Primzahlen

Geheimnisse und Rekorde

Aus dem Englischen übersetzt von Jörg Richstein.  
Auf den neuesten Stand gebracht von Wilfrid Keller.

Mit 29 Tabellen

Springer

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>vii</b>
<b>Danksagungen</b>	<b>ix</b>
<b>Anleitung für den Leser</b>	<b>xv</b>
<b>Erklärung der Symbole</b>	<b>xvii</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Wieviele Primzahlen gibt es?</b>	<b>3</b>
I Beweis von Euklid . . . . .	3
II Ein Beweis von Goldbach! . . . . .	6
III Beweis von Euler. . . . .	8
IV Beweis von Thue. . . . .	10
V Drei vergessene Beweise. . . . .	10
A Beweis von Perott . . . . .	11
B Beweis von Auric. . . . .	11
C Beweis von Metrod . . . . .	12
VI Beweis von Washington. . . . .	12
VII Beweis von Furstenberg . . . . .	13
<b>2 Wie kann man Primzahlen erkennen?</b>	<b>15</b>
I Das Sieb des Eratosthenes. . . . .	16
II Einige grundlegende Sätze über Kongruenzen. . . . .	17

A	Der kleine Satz von Fermat und Primitivwurzeln modulo einer Primzahl . . . . .	17
B	Der Satz von Wilson . . . . .	20
C	Die Eigenschaften von Giuga und von Wolstenholme . . . . .	22
D	Primzahlpotenzen als Teiler der Fakultät einer Zahl . . . . .	24
E	Der chinesische Restsatz . . . . .	27
F	Die Eulersche ( $\wedge$ —Funktion . . . . .	28
G	Folgen von Binomialzahlen . . . . .	34
H	Quadratische Reste . . . . .	37
<b>III</b>	<b>Klassische Primzahltests auf der Grundlage von Kongruenzen . . . . .</b>	<b>39</b>
IV	Lucas-Folgen . . . . .	44
V	Primzahltests auf der Grundlage von Lucas-Folgen . . . . .	59
VI	Fermat-Zahlen . . . . .	71
VII	Mersenne-Zahlen . . . . .	76
VIII	Pseudoprimzahlen . . . . .	89
A	Pseudoprimzahlen zur Basis 2 (psp). . . . .	89
B	Pseudoprimzahlen zur Basis $a$ (psp( $a$ )). . . . .	93
C	Euler-Pseudoprimzahlen zur Basis $a$ (epsp( $a$ )) . . . . .	96
D	Starke Pseudoprimzahlen zur Basis $a$ (spsp( $a$ )) . . . . .	98
IX	Carmichael- Zahlen . . . . .	<b>101</b>
X	Lucas-Pseudoprimzahlen . . . . .	104
A	Fibonacci-Pseudoprimzahlen . . . . .	105
B	Lucas-Pseudoprimzahlen (lpsp( $P, Q$ )). . . . .	107
C	Euler-Lucas-Pseudoprimzahlen (elpsp( $P, Q$ )) und starke Lucas-Pseudoprimzahlen (slpsp( $P, Q$ )) . . . . .	108
D	Carmichael-Lucas-Zahlen . . . . .	<b>109</b>
XI	Primzahltests und Faktorisierung . . . . .	110
A	Aufwand für einen Primzahltest . . . . .	111
B	Weitere Primzahltests . . . . .	113
C	Titanische und sonderbare Primzahlen . . . . .	122
D	Faktorisierung . . . . .	125
E	Kryptographie mit öffentlichem Schlüssel . . . . .	130
<b>3</b>	<b>Gibt es primzahldefinierende Funktionen?</b>	<b>135</b>
I	Funktionen mit der Eigenschaft (a). . . . .	135
II	Funktionen mit der Eigenschaft (b). . . . .	141
III	Primzahlerzeugende Polynome . . . . .	142
A	Primzahlwerte linearer Polynome . . . . .	144

B	Über quadratische Zahlkörper . . . . .	144
C	Primzahlerzeugende quadratische Polynome . . . .	149
D	Der Wettlauf um Primzahlwerte und Primteiler .	153
IV	Funktionen mit der Eigenschaft (c). . . . .	156

**Wie sind die Primzahlen verteilt? 161**

I	Die Funktion $ir(x)$ . . . . .	162
A	Historische Entwicklung . . . . .	163
B	Summen unter Einschluß der Möbius-Funktion .	176
C	Primzahltabellen . . . . .	177
D	Exakte Werte von $TT(X)$ und Vergleiche mit $x/\log x$ , $Li(\gg)$ und $R(x)$ . . . . .	178
E	Die nichttrivialen Nullstellen von $\xi(s)$ . . . . .	181
F	Nullstellenfreie Bereiche von $\xi(s)$ und das Fehl- erglied im Primzahlsatz. . . . .	185
G	Einige Eigenschaften von $ir(x)$ . . . . .	186
H	Die Verteilung der Werte von Eulers Funktion .	188
II	Die n-te Primzahl und Lücken zwischen Primzahlen . .	189
A	Die n-te Primzahl. . . . .	189
B	Lücken zwischen Primzahlen. . . . .	190
III	Primzahlzwillinge. . . . .	198
IV	Primzahlmehrlinge. . . . .	203
V	Primzahlen in arithmetischer Folge. . . . .	211
A	Es gibt unendlich viele! . . . . .	211
B	Die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Folge. . . . .	213
C	Primzahlreihen in arithmetischer Folge . . . . .	215
VI	Goldbachs berühmte Vermutung. . . . .	217
VII	Die Verteilung von Pseudoprimzahlen und Carmichael- Zahlen. . . . .	223
A	Verteilung von Pseudoprimzahlen . . . . .	223
B	Verteilung von Carmichael-Zahlen . . . . .	225
C	Verteilung von Lucas-Pseudoprimzahlen . . . . .	227

**Welche besonderen Arten von Primzahlen wurden untersucht? 229**

I	Reguläre Primzahlen . . . . .	229
II	Sophie-Germain-Primzahlen. . . . .	233
III	Wieferich-Primzahlen. . . . .	236
IV	Wilson-Primzahlen. . . . .	241
V	Repunit-Primzahlen. . . . .	242

VI	Zahlen der Form $kxb^n \pm l$ . . . . .	244
VII	Primzahlen und linear rekurrente Folgen zweiter Ordnung . . . . .	250
<b>6</b>	<b>Heuristische und probabilistische Betrachtungen</b>	<b>257</b>
I	Primzahlwerte linearer Polynome . . . . .	258
II	Primzahlwerte von Polynomen beliebigen Grades . . . . .	261
III	Polynome mit großen Bereichen zerlegbarer Werte . . . . .	269
IV	Partitio Numerorum . . . . .	271
	<b>Anhang</b>	<b>277</b>
	<b>Ausklang</b>	<b>281</b>
	<b>Literatur</b>	<b>283</b>
	<b>Webseiten</b>	<b>325</b>
	<b>Primzahlen bis 10 000</b>	<b>327</b>
	<b>Verzeichnis der Tabellen</b>	<b>331</b>
	<b>Verzeichnis der Rekorde</b>	<b>333</b>
	<b>Namensverzeichnis</b>	<b>335</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>349</b>