

HÜTTE

MATHEMATISCHE FORMELN UND TAFELN

HERAUSGEBER '

AKADEMISCHER VEREIN HÜTTE E.V.

VERFASSER -

PROZESSOR DR.-ING. I. SZABŐ



BERLIN 1959

VERLAG VON WILHELMERNST & SOHN «BERLIN

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Tafeln	1
Tafel 1. Näherungsformeln	1
Tafel 2. Potenzen, Wurzeln, natürliche Logarithmen, reziproke Werte, Kreisumfänge und Kreisflächen	2
Tafel 3. Mantissen der gewöhnlichen (Briggsschen) Logarithmen	32
Tafel 4. Kreisfunktionen	34
Tafel 5. Kreis-, Exponential- und Hyperbelfunktionen	38
Tafel 6. Kreis-, Exponential- und Hyperbelfunktionen (Zusatztafel) für die Argumentwerte $7I/4, 7II/2, 3III/4, 7I, 5IC/4, 3 II/2, 7^{1/4}, 27t$	45
Tafel 7. Kugelinhalte für die Durchmesser $d = 1$ bis 200	45
Tafel 8. Bogenlängen, Bogenhöhen, Sehnenlängen und Kreisabschnitte für den Radius 1	46
Tafel 9. Länge der Kreisbogen für den Radius 1	48
Tafel 10. Elliptisches Integral I. Gattung $F(\phi, k), k = \sin \alpha$	52
Tafel 11. Elliptisches Integral II. Gattung $E(\phi, k), k = \sin \alpha$	53
Tafel 12. Vollständige elliptische Integrale	54
Tafel 13. Binomialkoeffizienten $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{15}$	55
Tafel 14. Quadrat- und Kubikwurzeln einiger Brüche	55
Tafel 15. Wichtige Zahlenwerte von n, g und e	55
Tafel 16. Übergang von neuer Winkelteilung in alte Teilung und umgekehrt	56
Tafel 17. Verwandlung von Neuminute (c), Neusekunde (cc) in Altminute ('). Altsekunde (")	58
Tafel 18. Primzahlen	59
Tafel 19. Vielfache von $i, l/n$ u. ä.	60
Tafel 20. Einige Potenzen, Fakultäten und reziproke Fakultäten	60
Tafel 21. Pythagoreische Zahlen	61
Tafel 22. Lösungen einiger wichtiger transzendenter Gleichungen	61
Tafel 23. Nullstellen der Bessel-Funktionen $J_n(x/c) = 0$	61
Tafel 24. Besselsche Funktionen	62
Tafel 25. Kugelfunktionen	66
Tafel 26. Gammafunktion	68
II. Arithmetik	68
i A. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	68
a) Potenzen	68
b) Binomischer Satz	68
c) Regeln über Binomialkoeffizienten	69
d) Wurzeln	69
e) Logarithmen	70
B. Komplexe Zahlen	70
C. Kombinatorik	72
a) Permutationen	72
b) Kombinationen	72
c) Variationen	72
D. Algebraische Gleichungen	73
a) Quadratische Gleichungen	73
b) Gleichungen dritten Grades	73

Inhaltsverzeichnis

VII

	Seite
c) Gleichungen vierten Grades	74
d) Gleichungen höheren Grades	74
e) Hurwitzsche Kriterien	75
E. Summenformeln	75
a) Arithmetische Reihen	75
b) Geometrische Reihen	76
c) Einige besondere Summen	76
F. Zinsseszins- und Rentenrechnung	77
1. Zinsseszins (Tafel 27)	77
2. Wiederholte Zahlungen	77
3. Tilgung einer Schuld (Tafel 28)	78
III. Kreis- und Hyperbelfunktionen	79
A. Kreisfunktionen (trigonometrische Funktionen)	79
a) Winkleinheiten, Definitionen (Tafel 29)	79
b) Beziehungen zwischen den Funktionen eines Winkels	80
c) Beziehungen zwischen den Funktionen zweier Winkel	80
d) Funktionen von Vielfachen und Teilen eines Winkels	81
e) Potenzen von Sinus und Cosinus	82
f) Arcusfunktionen	82
g) Beziehungen zwischen den Funktionen dreier Winkel mit 180° als Summe	84
B. Ebene Dreiecke	84
a) Allgemeine Formeln	84
b) Rechtwinklige Dreiecke	85
c) Näherungsformeln für ebene Dreiecke	85
d) Schiefwinklige Dreiecke	86
C. Kugeldreiecke	86
a) Allgemeine Formeln	87
b) Rechtwinklige Dreiecke	87
c) Näherungsformeln für Kugeldreiecke	88
d) Kürzeste Entfernung zweier Erdpunkte	88
D. Hyperbelfunktionen	83
E. Zusammenhänge zwischen Kreis-, Hyperbel-, Exponentialfunktionen und ihren Umkehrungen im Komplexen	89
IV. Differential- und Integralrechnung	91
A. Grenzwerte	91
1. Folge von Zahlen	91
2. Limes einer Funktion	91
3. Besondere Grenzwerte	91
4. Asymptotische Näherungen	92
B. Unendliche Reihen	92
a) Binomische Reihe und Sonderfälle	92
b) Exponential- und logarithmische Reihen	93
c) Reihen für Kreisfunktionen, Arcusfunktionen und Hyperbelfunktionen	94
d) Rechnen mit Potenzreihen	95
1. Produkt zweier Potenzreihen	95
2. Quotient zweier Potenzreihen	95
3. Potenzen einer Potenzreihe	95
4. Umkehrung einer Potenzreihe	96
e) Einige andere unendliche Reihen und Produkte	96

	Seite
C. Differentialrechnung	99
a) Stetigkeit, Differenzierbarkeit	99
b) Differentiationsregeln	99
c) Ableitungen der elementaren Funktionen	99
d) Ableitungen höherer Ordnung	100
e) Partielle Ableitungen, totale Differentiale	100
f) Unentwickelte (implizite) Funktionen	101
g) Mittelwertsatz und Taylorsche Formel	102
1. Mittelwertsatz	102
2. Taylorsche Formel	102
3. Taylorsche Reihe	102
4. Taylorsche Formel für zwei Veränderliche	102
h) Unbestimmte Formen	103
i) Maxima und Minima	103
1. Funktion einer Veränderlichen	103
2. Funktion zweier oder mehrerer Veränderlicher	103
D. Integralrechnung	104
a) Allgemeine Integrationsregeln	104
b) Unbestimmte Grundintegrale	104
c) Integration rationaler Funktionen	105
d) Integrale einiger irrationaler Funktionen	107
e) Integrale transzendenter Funktionen	110
f) Bestimmte Integrale	112
1. Definition	112
2. Regeln	113
3. Mittelwertsatz der Integralrechnung	113
4. Uneigentliche Integrale	113
5. Ungleichungen	113
6. Spezielle bestimmte Integrale	113
g) Einige Integrale, die sich nicht auf elementare Funktionen zurückführen lassen.	118
Integration durch Reihenentwicklung	118
1. Integralsinus und Integralkosinus	118
2. Hyperbolischer Integralsinus und Integralkosinus	118
3. Integrallogarithmus und Exponentialintegral	119
4. Gaußsches Fehlerintegral und Krampfsche Transzendente	119
5. Fresnelsche Integrale	119
6. Gammafunktion und verwandte Funktionen (Gaußsche Pi- und Psi-Funktion und Betafunktion)	120
7. Elliptische Integrale	122
8. Legendresche Normalform	122
9. Reduktion elliptischer Integrale	122
10. Fundamentalintegrale in Legendrescher Normalform	123
11. Elliptische Funktionen von Jacobi	123
12. Weierstraßsche Normalform und Weierstraßsche Funktionen	124
13. Thetafunktionen	125
h) Mehrfache Integrale, Differentiation nach einem Parameter	126
1. Doppelintegral	126
2. Dreifaches Integral	126
3. Vertauschung der Integrationsvariablen	126
4. Linienintegrale, Flächenintegrale, Gaußscher und Stokesscher Integralsatz	126
5. Differentiation eines Integrals	127
E. Fouriersche Reihen und Integrale	127
Periodische Vorgänge	127
Andere Vorzeichen und besondere Entwicklungen	128
V. Lineare Vektoralgebra	130
A. Vektoren	130
1. Ortsvektor	130
2. Freie Vektoren	130

	Seite
3. Physikalische Begriffe	130
4. Addition	130
5. Multiplikation« mit Skalaren	131
6. Lineare Abhängigkeit, Dimension	131
7. Inneres Produkt	132
8. Einheitsvektoren	132
9. Dreibeine	132
10. Äußeres Prpdukt	133
11. Spatprodukt	133
12. Formeln	134
13. Ebene Vektoren	134
B. Koordinaten	134
1. Koordinatensystem .. J.....	134
2. Radiusvektor	134
3. Kartesische Koordinaten	135
4. Rechenoperationen in Koordinaten.....	135
5. Richtung im Raum	135
6. Koordinatentransformation	136
7. Koordinaten in der Ebene	136
C. Matrizen, Determinanten	137
1. Systeme von n Zahlen	137
2. Matrizen	137
3. Rechenoperationen mit Matrizen	137
4. Transponierte	138
5. Einheitsmatrix I	139
6. Determinanten	139
7. Grundregeln	139
8. Weitere Rechenregeln ..».....	140
9. Unterdeterminanten	140
10. Entwicklungssatz	140
11. Inverse Matrix	140
12. Praktische Berechnung von Determinanten	141
D. Systeme von linearen Gleichungen	141
E. Tensoren	142
1. Linearformen	142
2. Tensoren höherer Stufe	143
3. Transformation der Tensorkomponenten	143
4. Symmetrische Tensoren	143
5. Antisymmetrische Tensoren	143
6. Beispiele	144
7. Lineare Transformation	144
VI. Vektoranalysis	145
A. Differentialoperationen, Integrale	145
1. Vektorfunktionen	145
2. Differentiationsregeln	145
3. Skalare Felder	145
4. Vektorfelder	145
5. Tensorfelder	146
6. Linienintegral	146
7. Flächenintegral	146
8. Räumliches Integral	146
9. Differentiale von Feldern	146
10. Gradient	147
11. Divergenz	147
12. Rotation	147
13. V-B.echnung	147

	Seite
14. Regeln	148
15. Mehrfache Anwendung der Differentiationsoperatoren	148
16. Weitere Formeln	149
B. Integralsätze	149
1. Satz von Stokes	149
2. Satz von Gauß	149
3. Greensche Sätze	150
4. Spezialfälle	150
5. Wirbelfreie Felder	150
6. Quellenfreie Felder	150
7. Stetiges Vektorfeld in Summendarstellung	150
C. Krummlinige Koordinaten	151
1. Allgemeines	151
2. Transformation von dreifachen Integralen	151
3. Orthogonale Koordinaten	152
4. Linienelement, Volumenelement	152
5. Betrachtungen für die Ebene	152
6. Differentiationsoperationen	153
7. Eylinderkoordinaten	153
8. Kugelkoordinaten	153
VII. Analytische Geometrie	T. 154
A. Punkt und Gerade in der Ebene	154
1. Abstand	154
2. Richtung	154
3. Teilpunkt	154
4. Gerade Linie	154
5. Bestimmung der Gleichung einer Geraden	155
6. Hessesche Normalform	155
7. Abstand	155
8. Schnittwinkel	155
9. Dreieck	155
B. Punkt, Ebene und Gerade im Raum	156
1. Abstand	156
2. Richtung	156
3. Teilpunkt	156
4. Ebene	156
5. Hesse sehe Normalform	156
6. Bestimmung der Gleichung einer Ebene	157
7. Abstand	157
8. Winkel	157
9. Gefälle	157
10. Gleichung der Geraden	157
11. Zwei Geraden	157
12. Tetraeder	158
C. Kegelschnitte	158
a) Allgemeine Sätze	158
1. Kurven	158
2. Arten der Kegelschnitte	158
3. Mittelpunkt	159
4. Gleichung eines KS. ohne Mittelpunkt	159
5. Halbachsen und Halbparameter	159
6. Geometrische Erklärung der KS.	159
b) Spezielle Gleichungen und Konstruktionen	160
1. Kreis	160
2. Ellipse und Hyperbel	160
3. Parabel	165

D. Flächen zweiter Ordnung	167
1. Flächen	167
2. Arten der Flächen	167
3. Mittelpunkt	168
4. Normalformen	168
5. Kegel	168
6. Kugel	169
7. Paraboloid	169
8. Zylinder	169
E. Kurven in der Ebene	169
a) Allgemeine Sätze	169
1. Kurve	169
2. Bogenlänge	170
3. Tangente	170
4. Normale	170
5. Krümmung	170
6. Evolute	171
7. Wende- und Flachpunkt	171
8. Singuläre Punkte	172
9. Flächeninhalt	172
10. Einhüllende Kurve	172
11. Trajektorie	172
b) Spezielle Kurven	173
1. Kubische und semikubische Parabel	173
2. Zykloiden (Rattlinien)	173
3. Epizykloide und Hypozykloide	175
4. Kreisevolvente	176
5. Kettenlinie und Schleppkurve (Traktrix)	176
6. Archimedische Spirale	178
7. Hyperbolische Spirale	178
8. Logarithmische Spirale	179
9. Gleichungen einiger anderer Kurven	179
F. Kurven im Raum	180
a) Allgemeine Sätze	180
1. Kurve	180
2. Bogenlänge	181
3. Tangente	181
4. Begleitendes Dreibein	181
5. Besondere Ebenen	181
6. Torsion	182
7. Frenetsche Formeln	182
b) Gewöhnliche Schraubenlinie	182
1. Definition	182
2. Projektionen der Schraubenlinie	182
3. Bogenelement	182
4. Tangentenvektor	182
5. Krümmung	182
6. Windung	182
7. Konstruktion der Projektion der Schraubenlinie	183
2. Flächen im Raum	183
a) Allgemeine Sätze	183
1. Koordinatennetz	183
2. Erste Fundamentalform	183
3. Tangentialebene	184
4. Winkel zweier Flächenkurven	184
5. Flächeninhalt	185
6. Zweite Fundamentalform	185

	Seite-
7. Satz von Meusnier	185
8. Hauptkrümmungen	185
9. Satz von Euler	186
- 10. Theorema egregium von Gauß	186
11. Dupinsche Indikatrix	186
12. Krümmungslinien	186
13. Dreifaches Orthogonalsystem	186
b) Schraubenflächen	187
1. Allgemeine Schraubenfläche	187
2. Sonderfälle	187
3. Quadrat des Linienelements	187
4. Wendelfläche	187
5. Vektor der Flächennormale	187
6. Mittlere und Gaußsche Krümmung	187
7. Flächeninhalt	187
VIII. Funktionen einer komplexen Veränderlichen	187
A. Gaußsche Zahlenebene	188
1. Allgemeines	188
2. Einheitsvektoren	188
3. Rechenoperationen	188
4. Geometrische Deutung	189
5. Schwingungen	190
B. Analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen, konforme Abbildung ..	190
a) Grundlagen	190
1. Analytische oder reguläre Funktionen	190
2. Konforme Abbildung	191
3. Riemannscher Abbildungssatz	192
b) Integration im Komplexen	193
1. Erklärung des bestimmten Integrals	193
2. Hauptsatz der Funktionentheorie	193
3. Cauchy'sche Integralformel	193
4. Entwicklung analytischer Funktionen	193
5. Laurent-Reihen	193
6. Singularitäten	194
7. Residuum	194
c) Einige besondere konforme Abbildungen	194
IX. Differentialgleichungen	198
A. Gewöhnliche Differentialgleichungen	197
a) Allgemeine Sätze	197
1. Gewöhnliche Differentialgleichungen	197
2. Differentialgleichung n-ter Ordnung	197
3. Differentialgleichung erster Ordnung	197
b) Spezielle Fälle	198
1. Trennung der Veränderlichen	198
2. Exakte Differentialgleichungen	198
3. Integrierender Faktor	198
4. Homogene Differentialgleichungen	198
5. Lineare Differentialgleichung	198
6. Bernoullische Differentialgleichung	198
7. Riccatische Differentialgleichung	199
8. Verfahren der wiederholten Differentiation	199
9. Clairautsche Differentialgleichung	199
10. Singuläre Lösungen	199
11. Besondere Fälle	199

	Seite
c) Lineare Differentialgleichungen	200
1. Definition	200
2. Homogene Differentialgleichung	200
3. Reduktion der Ordnung	200
4. Inhomogene Differentialgleichung	200
5. Variation der Konstanten	201
6. Konstante Koeffizienten	202
7. Eulersche Differentialgleichung	203
d) Systeme von Differentialgleichungen (gekoppelte Differentialgleichungen)	203
1. Definition	203
2. Das allgemeine Integral	204
3. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	204
e) Spezielle lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	205
1. Hypergeometrische Differentialgleichung	205
2. Legendresche Differentialgleichung	206
3. Konfluente hypergeometrische und Whittakersehe Differentialgleichung	207
4. Besselsche Differentialgleichung	208
5. Mathiesche Differentialgleichung	214
B. Partielle Differentialgleichungen	216
a) Allgemeine Sätze	216
1. Begriff der partiellen Differentialgleichung	216
2. Partielle Differentialgleichung m-ter Ordnung	216
3. Besondere Formen der partiellen Differentialgleichungen	217
b) Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	217
1. Quasilineare Gleichungen	217
2. Allgemeine Gleichung	217
3. Anfangswertproblem	217
c) Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	218
1. Normalformen	218
2. Verfahren der Trennung der Variablen	219
3. Anfangs- und Randbedingungen	220
4. Besondere Differentialgleichungen	220
5. Operatorerechnung und Laplace-Transformation	223
C. Randwertprobleme, Variationsrechnung	223
a) Rand- Und Eigenwertprobleme	223
1. Grundlagen	223
2. Homogene und inhomogene Randwertprobleme	224
3. Alternativsatz	224
4. Eigenwertprobleme	224
b) Variationsrechnung	225
1. Grundaufgabe	225
2. Eulersche Differentialgleichung	226
3. Legendresche Bedingung	227
4. Nebenbedingungen	227
5. Allgemeine Eulersche Differentialgleichung	227
6. Ritzsches Verfahren	228
7. Zurückführung von Eigenwertproblemen auf Variationsprobleme	228
D. Integralgleichungen	229
a) Allgemeine Sätze	229
1. Grundlagen	229
2. Einfache Arten	230
3. Fredholmscher Alternativsatz	230
4. Rand- und Eigenwertprobleme	230
b) Spezielle Fälle	230
1. Fouriersche Integralgleichung	230
2. Laplacetransformation	231
3. Hilberttransformation	231
4. Abelsche Integralgleichung	231
5. Hankeische Integralgleichung	231

X. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik	231
a) Wahrscheinlichkeitsrechnung	231
1. Wahrscheinlichkeitsfelder und zufällige Größen	231
2i Borel-Cantellisches Lemma	233
3. Allgemeines über Verteilungen	233
4. Spezielle, diskrete und binomische Verteilungen (Tafel 30 u. 31)	235
5. Grenzwertsätze	238
6. Markoff sehe Ketten	239
b) Mathematische Statistik	240
1. Schätzverfahren	240
2." Hypothesentest	241
3. Signifikanzteste	241
XI. Praktische Mathematik	242
A. Zahlenrechnen	242
1. Allgemeine Regeln zur Ausführung längerer Berechnungen	242
2. Rechenhilfsmittel	242
3. Multiplikation und Division	242
4. Quadratwurzeln	242
5. w-te Wurzeln	242
6. Näherungsformeln	243
7. Fehlerrechnung	243
B. Nomographie	243
-1. Aufgabe der Nomographie	243
2. Funktionsnetze	244
3. Netztafeln	244
4. Fluchtlinientafeln	245
0. Interpolations- und Differenzenrechnung, analytische Darstellung tabellarischer Funktionen	246
1. Lagrangesche Interpolationsformel	246
2. Newtonsche Interpolationsformel	246
3. Differenzenschema	247
4. Newtonsche Formel bei gleichen Argumentabständen	247
5. Newtonsche Formel bei aufsteigenden Differenzen und andere Formeln	247
6. Glätten einer Beobachtungsreihe	248
7. Tabellarische Differentiation und Integration	248
8. Berechnung des Wertes eines Polynoms	249
D. Rechnerische, zeichnerische und instrumentelle Verfahren der praktischen Analysis	249
a) Zeichnerische und instrumentelle Verfahren	249
1. Konstruktion des Wertes eines Polynoms	249
2. Messungen und Konstruktionen an gezeichneten Kurven; Bogenlänge	250
3. Flächeninhalt	250
4. Andere Maßbestimmungen durch bestimmte Integrale	251
5. Zeichnerische Integration	252
6. Zeichnerische Differentiation	252
7- Zweite Integralkurve	253
8. Verfahren der zweifachen Integration unter Benutzung von Schwerpunkten	253
9. Zeichnerische Integration von Differentialgleichungen 1. Ordnung	254
10. Gekoppelte Differentialgleichungen 1. Ordnung	255
11. Differentialgleichungen 2. Ordnung	256
b) Auflösung von Gleichungen	256
1. Lösung durch Näherungswert	256
2. Zeichnerische Auflösung	256
3. Verbesserung durch Interpolation (Regula falsi)	256
4. Newtonsches Näherungsverfahren	256
5. Verfahren des wiederholten Einsetzens (Iterationsverfahren)	257

	Seite
6. Verfahren von Graeffe.....	257
7. Eliminationsverfahren bei Systemen von linearen Gleichungen	258
c) Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.....	258
1. Eulersche Summenformel	259
2. Spezialfall.....	259
3. Simpsonsche Regel.....	259
4. Gaußsche Quadraturformel (Tafel 32).....	259
d) Numerische Integration von Differentialgleichungen.....	260
1. Verfahren von Adams-Störnier.....	260
2. Verfahren von Runge-Kutta.....	261
3. Differenzenverfahren (Tafel 33).....	262
4. Systeme von Differentialgleichungen.....	263
e) Harmonische Analyse.....	263
1. Allgemeines.....	263
2. Besselsche Formeln.....	264
3. Verfahren von Runge.....	264
4. Zeichnerisches Verfahren.....	265
5. Verfahren von Eagle.....	265
E. Parallelprojektion.....	266
XII. Inhalte von Flächen und Körpern.....	267
a) Flächeninhalte ebener Gebilde.....	267
* Werte der regelmäßigen Vielecke (Tafel 34).....	269
b) Inhalte und Oberflächen von Körpern.....	270
Guldinsche (P ⁿ -ppussche) Regeln.....	273
XIII. Alte gelöste und ungelöste mathematische Probleme.....	274
Schrifttum.....	276
Stichwortverzeichnis (Dipl.-Ing. P. Reinshagen).....	280