

Einführung in die Zahlentheorie I

von

Ivan Niven

University of Oregon

und

Herbert S. Zuckerman †

University of Washington



Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich
B. I.-Wissenschaftsverlag

INHALTSVERZEICHNIS

1. TEILBARKEIT	1
1.1 Einführung	1
1.2 Teilbarkeit	4
1.3 Primzahlen	15
2. KONGRUENZEN	27
2.1 Kongruenzen	27
2.2 Lösungen von Kongruenzen	38
2.3 Kongruenzen vom Grad 1	40
2.4 Die EULERSche ϕ -Funktion	46
2.5 Kongruenzen höheren Grades	51
2.6 Primzahlpotenzmoduln	53
2.7 Primzahlmoduln	58
2.8 Quadratische Kongruenzen mit Primzahlmodul	62
2.9 Potenzreste	63
2.10 Zahlentheorie in algebraischer Sicht	70
2.11 Multiplikative Gruppen, Ringe, Körper	76
3. QUADRATISCHE REZIPROZITÄT	85
3.1 Quadratische Reste	85
3.2 Quadratische Reziprozität	90
3.3 Das JACOBIsymbol	95
4. FUNKTIONEN IN DER ZAHLENTHEORIE	102
4.1 Die Funktion $[x]$	102

4.2	Zahlentheoretische Funktionen	110
4.3	Die Umkehrformel von MÖBIUS	115
4.4	Die Multiplikation zahlentheoretischer Funktionen	119
4.5	Rekursionsformeln	128
5.	DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN	132
5.1	Wesen der DIOPHANTischen Gleichung	132
5.2	Die Gleichung $ax + by = c$	133
5.3	Lösungen in natürlichen Zahlen	135
5.4	Weitere lineare Gleichungen	137
5.5	Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$	140
5.6	Die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$	142
5.7	Summen von vier und fünf Quadratzahlen	145
5.8	Das WARINGSche Problem	150
5.9	Summe von vierten Potenzen	151
5.10	Summe von zwei Quadraten	152
5.11	Die Gleichung $4x^2 + y^2 = n$	158
5.12	Die Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$	162
5.13	Binäre quadratische Formen	167
5.14	Äquivalenz von quadratischen Formen	172
6.	FAREYBRÜCHE UND IRRATIONALE ZAHLEN	182
6.1	FAREYfolgen	182
6.2	Rationale Approximationen	186
6.3	Irrationale Zahlen	193
6.4	Überdeckungen der Zahlengeraden	199

INHALTSVERZEICHNIS

Teil 2 HTB 47

7. KETTENBRÜCHE	202
7.1 Der EUKLIDISCHE Algorithmus	202
7.2 Eindeutigkeit	204
7.3 Unendliche Kettenbrüche	207
7.4 Irrationale Zahlen	212
7.5 Approximation an irrationale Zahlen	215
7.6 Bestmögliche Approximationen	220
7.7 Periodische Kettenbrüche	224
7.8 Die PELLSCHE Gleichung	231
7.9 Numerische Berechnung	237
8. ELEMENTARE BEMERKUNGEN ÜBER DIE VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN	239
8.1 Die Funktion $\pi(x)$	239
8.2 Die Folge der Primzahlen	243
8.3 Das BERTRANDSCHE Postulat	248
9. ALGEBRAISCHE ZAHLEN	252
9.1 Polynome	252
9.2 Algebraische Zahlen	258
9.3 Algebraische Zahlkörper	264
9.4 Ganze algebraische Zahlen	270
9.5 Quadratische Zahlkörper	273
9.6 Einheiten in quadratischen Zahlkörpern	276
9.7 Primzahlen quadratischer Zahlkörper	278
9.8 Die eindeutige Primzahlzerlegung	281
9.9 Primzahlen in quadratischen Körpern mit der Eigenschaft der eindeutigen Primzahl- zerlegung	283
9.10 Die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$	290

10. DIE PARTITIONSFUNKTION	298
10.1 Zerfällungen	298
10.2 Graphen	300
10.3 Formale Potenzreihen und die EULERSche Identität	304
10.4 Die EULERSche Formel	310
10.5 Die JACOBSche Formel	318
10.6 Eine Teilbarkeitseigenschaft	321
11. DIE DICHTEN VON FOLGEN GANZER ZAHLEN	326
11.1 Asymptotische Dichten	327
11.2 Quadratfreie Zahlen	330
11.3 Mengen der Dichten Null	334
11.4 Die SCHNIRELMANN-Dichten und das $\alpha\beta$ -Theorem	339
VERSCHIEDENARTIGE ÜBUNGSBEISPIELE	347
ERGÄNZENDE BETRACHTUNGEN	350
Periodische Dezimalzahlen	
Stammbrüche	
Die Gleichung $x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}$	
Verallgemeinerung des FERMATSchen Satzes durch GAUSS	
Ein gruppentheoretischer Beweis für die Existenz einer Primi- tivwurzel modulo p	
Die Gruppe der rationalen Punkte auf dem Einheitskreis	
Bestimmung des Wochentages aus dem Datum	
Determinanten in der Zahlentheorie	
Darstellung ganzer GAUSSScher Zahlen als Summe von Quadraten	
Die eindeutige Primzahlzerlegung der ganzen GAUSSSchen Zahlen	
Der EISENSTEINSche Irreduzibilitäts- satz	
LITERATURVERZEICHNIS	364
LÖSUNGEN DER RECHENAUFGABEN	367
NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS	374

Einführung in die Zahlentheorie II

von

Ivan Niven

University of Oregon

und

Herbert S. Zuckerman †

University of Washington



Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich
B. I. - Wissenschaftsverlag

INHALTSVERZEICHNIS

7. KETTENBRÜCHE	202
7.1 Der EUKLIDISCHE Algorithmus	202
7.2 Eindeutigkeit	204
7.3 Unendliche Kettenbrüche	207
7.4 Irrationale Zahlen	212
7.5 Approximation an irrationale Zahlen	215
7.6 Bestmögliche Approximationen	220
7.7 Periodische Kettenbrüche	224
7.8 Die PELLSCHE Gleichung	231
7.9 Numerische Berechnung	237
8. ELEMENTARE BEMERKUNGEN ÜBER DIE VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN	239
8.1 Die Funktion $\pi(x)$	239
8.2 Die Folge der Primzahlen	243
8.3 Das BERTRANDSCHE Postulat	248
9. ALGEBRAISCHE ZAHLEN	252
9.1 Polynome	252
9.2 Algebraische Zahlen	258
9.3 Algebraische Zahlkörper	264
9.4 Ganze algebraische Zahlen	270
9.5 Quadratische Zahlkörper	273
9.6 Einheiten in quadratischen Zahlkörpern	276
9.7 Primzahlen quadratischer Zahlkörper	278
9.8 Die eindeutige Primzahlzerlegung	281
9.9 Primzahlen in quadratischen Körpern mit der Eigenschaft der eindeutigen Primzahl- zerlegung	283
9.10 Die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$	290

10. DIE PARTITIONSFUNKTION	298
10.1 Zerfällungen	298
10.2 Graphen	300
10.3 Formale Potenzreihen und die EULERSche Identität	304
10.4 Die EULERSche Formel	310
10.5 Die JACOBISChe Formel	318
10.6 Eine Teilbarkeitseigenschaft	321
11. DIE DICHTe VON FOLGEN GANZER ZAHLEN	326
11.1 Asymptotische Dichte	327
11.2 Quadratfreie Zahlen	330
11.3 Mengen der Dichte Null	334
11.4 Die SCHNIRELMANN-Dichte und das ω -Theorem	339
VERSCHIEDENARTIGE ÜBUNGSBEISPIELE	347
ERGÄNZENDE BETRACHTUNGEN	350
Periodische Dezimalzahlen	
Stambrüche	
Die Gleichung $x^{-n} + y^{-n} = z^{-n}$	
Verallgemeinerung des FERMATSchen Satzes durch GAUSS	
Ein gruppentheoretischer Beweis für die Existenz einer Primi- tivwurzel modulo p	
Die Gruppe der rationalen Punkte auf dem Einheitskreis	
Bestimmung des Wochentages aus dem Datum	
Determinanten in der Zahlentheorie	
Darstellung ganzer GAUSSscher Zahlen als Summe von Quadraten	
Die eindeutige Primzahlzerlegung der ganzen GAUSSschen Zahlen	
Der EISENSTEINSche Irreduzibilitäts- satz	
LITERATURVERZEICHNIS	364
LÖSUNGEN DER RECHENAUFGABEN	367
NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS	374

1. TEILBARKEIT	1
1.1 Einführung	1
1.2 Teilbarkeit	4
1.3 Primzahlen	15
2. KONGRUENZEN	27
2.1 Kongruenzen	27
2.2 Lösungen von Kongruenzen	38
2.3 Kongruenzen vom Grad 1	40
2.4 Die EULERSche ϕ -Funktion	46
2.5 Kongruenzen höheren Grades	51
2.6 Primzahlpotenzmodula	53
2.7 Primzahlmodula	58
2.8 Quadratische Kongruenzen mit Primzahlmodul	62
2.9 Potenzreste	63
2.10 Zahlentheorie in algebraischer Sicht	70
2.11 Multiplikative Gruppen, Ringe, Körper	76
3. QUADRATISCHE REZIPROZITÄT	85
3.1 Quadratische Reste	85
3.2 Quadratische Reziprozität	90
3.3 Das JACOBIsymbol	95
4. FUNKTIONEN IN DER ZAHLENTHEORIE	102
4.1 Die Funktion $[x]$	102

4.2	Zahlentheoretische Funktionen	110
4.3	Die Umkehrformel von MÖBIUS	115
4.4	Die Multiplikation zahlentheoretischer Funktionen	119
4.5	Rekursionsformeln	128
5.	DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN	132
5.1	Wesen der DIOPHANTISCHEN Gleichung	132
5.2	Die Gleichung $ax + by = c$	133
5.3	Lösungen in natürlichen Zahlen	135
5.4	Weitere lineare Gleichungen	137
5.5	Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$	140
5.6	Die Gleichung $x^4 + y^4 = z^2$	142
5.7	Summen von vier und fünf Quadratzahlen	145
5.8	Das WARINGSche Problem	150
5.9	Summe von vierten Potenzen	151
5.10	Summe von zwei Quadraten	152
5.11	Die Gleichung $4x^2 + y^2 = n$	158
5.12	Die Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$	162
5.13	Binäre quadratische Formen	167
5.14	Äquivalenz von quadratischen Formen	172
6.	FAREYBRÜCHE UND IRRATIONALE ZAHLEN	182
6.1	FAREYfolgen	182
6.2	Rationale Approximationen	186
6.3	Irrationale Zahlen	193
6.4	Überdeckungen der Zahlengeraden	199