

# PHYSIKALISCHE ANWENDUNG DER VEKTOR- UND TENSORRECHNUNG

VON

HORST TEICHMANN

HONORARPROFESSOR  
AN DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT MANNHEIM

---

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

# INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort . . . . .	7
I. Vektor- und Tensoralgebra . . . . .	9
1. Einleitung, Begriffe. . . . .	9
2. Vektoraddition, -subtraktion und -multiplikation mit Skalaren . . . . .	11
3. Vektormultiplikation mit Vektoren . . . . .	14
a) skalares Produkt. . . . .	14
b) vektorielles Produkt . . . . .	17
c) mehrfache Vektorprodukte. . . . .	19
d) gemischtes Produkt . . . . .	20
e) reziproke (duale) Vektorsysteme . . . . .	22
f) dreifaches Vektorprodukt . . . . .	24
g) vierfache Vektorprodukte . . . . .	26
h) Invarianten, metrische Fundamentalgrößen . . . . .	28
i) dyadisches Produkt . . . . .	30
4. Tensoren und ihre Eigenschaften . . . . .	31
a) Tensorbegriff . . . . .	31
b) Komponentendarstellung. . . . .	31
c) Symmetrie und Antisymmetrie. . . . .	32
d) Einheitstensor, reziproker Tensor . . . . .	36
e) konjugierte Tensoren . . . . .	37
f) Hauptachsentransformation . . . . .	38
g) Tensorinvarianten . . . . .	41
5. Anwendungen . . . . .	42
a) Gleichungen der Kegelschnitte . . . . .	42
$\alpha$ ) Ellipsenzirkel . . . . .	42
$\beta$ ) Polargleichung der Kegelschnitte. . . . .	44
b) verschiedene Formen der Gleichung einer Ebene . . . . .	45
$\alpha$ ) Ebene durch drei Punkte . . . . .	45
$\beta$ ) Hessesche Normalform der Gleichung einer Ebene . . . . .	46
c) Drehung des Koordinatensystems . . . . .	48
d) Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse . . . . .	51
e) allgemeinste Bewegung eines starren Systems . . . . .	51
f) Schwarzsche Ungleichung . . . . .	53
g) Besselsche Ungleichung, Vollständigkeitsrelation . . . . .	55
h) Determinantenrechnung . . . . .	56
$\alpha$ ) Vertauschungsregeln . . . . .	56
$\beta$ ) „Rändern“ von Determinanten . . . . .	56
$\gamma$ ) Hadamardsche Determinantenabschätzung . . . . .	57
$\delta$ ) Legendresche Identität. . . . .	58
$\epsilon$ ) Multiplikation zweier Determinanten . . . . .	59
$\zeta$ ) Gramsche Determinante . . . . .	60
$\eta$ ) Auflösung von linearen Gleichungssystemen . . . . .	61
i) Kristallgittertheorie . . . . .	63
$\alpha$ ) Beschreibung des Gitters durch Vektoren . . . . .	63
$\beta$ ) Gitterebenen, Millersche Indizes . . . . .	65
$\gamma$ ) Beugung am Kristallgitter, Lauesche und Braggsche Gleichung . . . . .	70
j) Spannungstensor . . . . .	72
II. Vektoranalysis . . . . .	75
1. Differentiation von Vektoren und Vektorprodukten . . . . .	76
2. Vektorielle Differentialoperationen und Integralsätze . . . . .	77
a) Gradient . . . . .	77
b) Divergenz . . . . .	81
c) Gaußscher Satz . . . . .	83
d) Laplacescher Operator . . . . .	84
e) Greensche Sätze, Randwertaufgaben . . . . .	86
f) Rotation, Stokescher Satz . . . . .	91
g) formale Operationen mit $\nabla$ , Richtungsdifferentiation . . . . .	93

h) Vektorpotential, zyklisches Potential . . . . .	96	III. Tensoranalysis . . . . .	153
3. Anwendungen . . . . .	98	1. Differentialinvarianten . . . . .	153
a) Frenetsche Formeln . . . . .	98	a) kovariante Ableitung, lokale Tensoren . . . . .	153
b) Trägheitskräfte . . . . .	101	b) Krümmungstensor . . . . .	154
$\alpha$ ) Zentrifugalkraft . . . . .	101	2. Anwendungen . . . . .	159
$\beta$ ) Coriolis-Kraft . . . . .	102	a) allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	159
c) Drehimpuls . . . . .	104	$\alpha$ ) physikalische Problemstellung . . . . .	159
d) Flächensatz . . . . .	104	$\beta$ ) Feldgleichungen der Gravitation . . . . .	163
e) Bahn im Schwerfeld . . . . .	105	$\gamma$ ) Planetenbewegung . . . . .	164
f) Trägheitstensor . . . . .	107	$\delta$ ) Erhaltungssätze . . . . .	165
g) Eulersche Kreisellgleichungen . . . . .	109	$\epsilon$ ) Raumkontraktion, Zeitdilatation, Eigenzeit . . . . .	166
h) elektromagnetisches Feld . . . . .	111	IV. Funktionalrechnung . . . . .	170
$\alpha$ ) Poissonsche Gleichung . . . . .	111	1. Übergang vom abzählbaren zum kontinuierlich Unendlichen . . . . .	170
$\beta$ ) Biot-Savartsches Gesetz . . . . .	112	2. Reihenentwicklung . . . . .	172
$\gamma$ ) magnetisches Blatt . . . . .	115	a) Entwicklung nach einem orthogonalen Funktionensystem . . . . .	172
$\delta$ ) ponderomotorische Kräfte . . . . .	117	b) Entwicklung nach einem nichtorthogonalen Funktionensystem . . . . .	174
$\epsilon$ ) elektromagnetische Induktion . . . . .	119	3. Integralgleichungen . . . . .	177
i) nichtstationärer Feldzustand . . . . .	121	a) Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen . . . . .	177
$\alpha$ ) Hertzscher Dipol . . . . .	121	b) Äquivalenz zwischen Integral- und Differentialgleichungen . . . . .	179
$\beta$ ) Maxwellscher Spannungstensor . . . . .	129	4. Alternierende Differentialformen . . . . .	182
4. Vektorielle Differentialoperationen in höherdimensionalen Räumen . . . . .	133	5. Anwendungen . . . . .	185
a) krummlinige Koordinaten . . . . .	133	a) Transformationen im Hilbert-Raum . . . . .	185
$\alpha$ ) kovariantes und kontravariantes System . . . . .	133	b) Fouriersches und Wienerisches Theorem . . . . .	186
$\beta$ ) Transformationsgleichungen . . . . .	135	c) Schrödingersche Wellengleichung . . . . .	189
$\gamma$ ) Differentialinvarianten . . . . .	139	d) elektrischer Durchschlag . . . . .	192
b) euklidische und nichteuklidische Mannigfaltigkeiten . . . . .	142	e) vierdimensionale, relativistische Elektrodynamik . . . . .	194
$\alpha$ ) Gaußsche Krümmung, Kriterium für die räumliche Struktur . . . . .	142	V. Literatur . . . . .	200
$\beta$ ) absolutes Differential . . . . .	148	Sachregister . . . . .	202
$\gamma$ ) lineare Übertragung . . . . .	149		
$\delta$ ) geodätische Linien . . . . .	151		
$\epsilon$ ) Christoffelsche Indizesymbole . . . . .	152		