

THEORIE DER VERBÄNDE

VON

HELMUTH GERICKE

APL. PROFESSOR FÜR MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT FREIBURG



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT MANNHEIM

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung. Algebra der Logik

§ 1	Boolesche Algebra	.11
§ 2	Klassische Aussageillogik (Junktorenlogik)	.12
§ 3	Brouwersche Aussagenlogik	.15
§ 4	Erläuterungen zu einigen oft benutzten Zeichen	.18

Kap. I. Mengen und Relationen 20

§ 1	Erläuterung der Grundbegriffe	.20
§ 2	Zweistellige Relationen in einer Menge M	.23
§ 3	Verknüpfungen	.28
§ 4	Operationen mit zweistelligen Relationen	.30
4.1	Das Relationenprodukt	.30
4.2	Die konverse Relation. Darstellung der Eigenschaften von Relationen.	.31

Kap. II. Quasigeordnete und geordnete Mengen 33

§ 1	Allgemeines	.33
1.1	Definitionen.	.33
1.2	Beispiele.	.33
1.3	Ordnungsdiagramm.	.34
§ 2	Schranken und Grenzen	.35
2.1	Definitionen.	.35
2.2	Existenz	.36
§ 3	Maximale und minimale Elemente	.38
§ 4	Existenzkriterien für maximale oder minimale Elemente	.39
4.1	Längenendlichkeit	.39
4.2	Das Maximalprinzip.	.40

Kap. III. Gerichtete Mengen und Verbände 41

§ 1	Gerichtete Mengen in der Theorie der Konvergenz	.41
§ 2	Verbände. Beispiele	.43
2.1	Einige endliche Verbände.	.43
2.2	Linear geordnete Mengen und direkte Produkte.	.43
2.3	Untermengen einer Menge.	.46
2.4	Untergruppen einer Gruppe.	.48
§ 3	Algebraische Kennzeichnung der Verbände	.50

Kap. IV. Grundbegriffe der abstrakten Algebra	55
§ 1 Gebilde	55
1.1 Beispiele.	55
1.2 Homomorphismus.	55
1.3 Kongruenzrelationen.	61
§ 2 Struktur	62
Kap. V. Semimodulare und modulare Verbände	68
§ 1 Kettensatz	68
§ 2 Abstand und Dimension	72
§ 3 Modularität	74
§ 4 Normalteiler einer Gruppe	78
§ 5 Aus der Algebra der Relationen	81
5.1 Rechengesetze.	81
5.2 Korrespondenzen.	84
5.3 Äquivalenzrelationen.	85
5.4 Anwendungen auf Gruppen.	89
5.5 Der Verfeinerungssatz.	91
§ 6 Komplementäre modulare Verbände.	95
6.1 Das Komplement	95
6.2 Projektive Geometrie.	97
6.3 Orthokomplement.	105
Kap. VI. Distributive Verbände	109
§ 1 Allgemeine Aussagen	109
1.1 Definition.	109
1.2 Beispiele.	110
1.3 Rechengesetze.	111
1.4 Distributivität in vollständigen Verbänden.	114
§ 2 Brouwersche oder subjunktive Verbände	117
2.1 Definition. Kennzeichnende Eigenschaften.	117
2.2 Negation. Pseudokomplement	119
§ 3 Boolesche Verbände	122
3.1 Jeder Boolesche Verband ist subjunktiv.	122
3.2 Beispiele.	123
3.3 Boolesche Funktionen, allgemein.	127
3.4 Addition. Der Boolesche Verband als Ring.	128
3.5 Funktionen einer Veränderlichen.	132
3.6 Funktionen von zwei Veränderlichen.	136

Kap. VII. Zerlegungs- und Einbettungssätze	140
§ 1 Zerlegung eines Elements in irreduzible Elemente	140
1.1 Definition. Problemstellung	140
1.2 Eindeutigkeit der Zerlegung in distributiven Verbänden	141
1.3 Der Austauschsatz in modularen Verbänden	143
1.4 Zerlegung in Atome.	146
§2 Einbettungssätze.	147
2.1 Problemstellung	147
2.2 Einbettung einer geordneten Menge in einen vollständigen Verband.	148
2.3 Einbettung eines Verbandes in einen vollständigen Verband	150
2.4 Ideale und Filter.	151
2.5 Einbettung eines distributiven Verbandes in einen komplementären Verband.	153
§ 3 Einbettung eines Verbandes in ein direktes Produkt. Anwendung in der Teilbarkeitstheorie.	157
3.1 Einbettung in ein direktes Produkt	157
3.2 Anwendung in der Teilbarkeitstheorie. Fragestellung	159
3.3 Verbandsgruppen.	160
3.4 Einbettung einer geordneten Gruppe in eine Verbandsgruppe	163
3.5 Einbettung einer Verbandsgruppe in das direkte Produkt linear geordneter Gruppen.	165
Literatur.	170