

Numerische Mathematik für Ingenieure

von

Dr. rer. nat. Gisela Jordan-Engeln

*Oberingenieur am Institut für Geometrie und
Praktische Mathematik der
Rheinisch- Westfälischen Technischen
Hochschule Aachen*

Dr. rer. techn. Fritz Reutter

*o. Professor und Direktor des Instituts für
Geometrie und Praktische Mathematik an der
Rheinisch - Westfälisch en Technischen
Hochschule Aachen*



Bibliographisches Institut/Mannheim/Wien/Zürich

B. I. -Wissenschafts verlag

INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
0. Einführung	1
0.1 Motivation für die Beschäftigung mit numerischer Mathematik	1
0.2 Aufgaben und Methoden der numerischen Mathematik	2
0.3 Rechenhilfsmittel	5
0.4 Gesichtspunkte für die Auswahl eines numerischen Verfahrens	7
0.5 Entwicklung der numerischen Mathematik	8
1. Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse	10
1.1 Definition von Fehlergrößen	10
1.2 Dezimaldarstellung von Zahlen	12
1.3 Rundungsvorschriften für Dezimalzahlen	13
1.4 Schreibweise für Näherungszahlen und Regeln zur Bestim- mung der Anzahl sicherer Stellen	16
1.5 Fehlerquellen	18
1.5.1 Der Verfahrensfehler	18
1.5.2 Der Eingangsfehler	19
1.5.3 Der Rechnungsfehler	22
2. Numerische Verfahren zur Lösung algebraischer und transzen- denter Gleichungen	25
2.1 Vorbemerkungen und Motivation	25
2.2 Iterationsverfahren	26
2.2.1 Konstruktionsmethode und Definition	26
2.2.2 Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit der Lösungen	29
2.2.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens	32
2.2.3.1 Heuristische Betrachtung	32
2.2.3.2 Analytische Betrachtung	33
2.2.4 Fehlerabschätzungen	35
2.2.5 Praktische Durchführung und Anwendungsbeispiele	37
2.2.5.1 Algorithmus	37
2.2.5.2 Bestimmung der Startwerte	38
2.2.5.3 Konvergenzuntersuchung	39
2.2.5.4 Anwendungsbeispiel	40
2.2.6 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens	41
2.2.7 Spezielle Iterationsverfahren	43

	Seite
2.2.7.1 Das Newtonsche Verfahren (für einfache Nullstellen)	43
2.2.7.2 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen	48
2.2.7.3 Regula falsi	53
2.2.8 Konvergenzverbesserung mit Hilfe des Verfahrens von Steffensen	54
2.3 Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen	58
2.3.1 Vorbemerkungen	58
2.3.2 Das Homer-Schema für algebraische Polynome	60
2.3.2.1 Das einfache Horner-Schema	60
2.3.2.2 Das vollständige Horner-Schema	62
2.3.2.3 Anwendungen	64
2.3.3 Bemerkungen zur Bestimmung sämtlicher Lösungen einer algebraischen Gleichung mit Hilfe von Iterationsverfahren	65
2.3.4 Direkte Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen	66
2.3.4.1 Der QD-Algorithmus	67
2.3.4.2 Das Graeffe-Verfahren	75
2.4 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	75
3. Verfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme	77
3.1 Vorbemerkungen	77
3.2 Aufgabenstellung und theoretische Betrachtung	78
3.3 Der Gaußsche Algorithmus	79
3.3.1 Prinzip	79
3.3.2 Konstruktion des Verfahrens	80
3.3.3 Beispiele	85
3.3.4 Gleichungssysteme mit tridiagonalen Matrizen	90
3.4 Mechanisierter Algorithmus von Banachiewicz	91
3.5 Das Gauß-Jordan-Verfahren	93
3.6 Bestimmung der zu einer Matrix inversen Matrix durch Pivotisieren	96
3.7 Fehler, Kondition und Nachiteration	101
3.7.1 Fehler und Kondition	101
3.7.2 Nachiteration	106
3.8 Iterationsverfahren	108
3.8.1 Vorbemerkungen	108

3.8.2	Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten	109
3.8.2.1	Konstruktion des Verfahrens	109
3.8.2.2	Konvergenz und Fehlerabschätzung	112
3.8.3	Das Iterationsverfahren in Einzelschritten oder das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren	120
3.8.4	Relaxationsverfahren von Gauß-Southwell	122
3.9	Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	127
4.	Systeme nichtlinearer Gleichungen	130
4.1	Vorbemerkungen	130
4.2	Iterationsverfahren	131
4.2.1	Konstruktionsmethode und Definition	131
4.2.2	Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit der Lösungen. Konvergenz eines Iterationsverfahrens. Fehlerabschätzungen	132
4.3	Spezielle Iterationsverfahren	134
4.3.1	Das Newtonsche Verfahren	134
4.3.2	Das Verfahren des stärksten Abstiegs	140
4.3.3	Entscheidungshilfen bei der Auswahl des Verfahrens. Sonderfälle	144
5.	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	146
5.1	Definitionen und Aufgabenstellungen	146
5.2	Diagonalähnliche Matrizen	147
5.3	Das Iterationsverfahren nach v. Mises zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors	150
5.4	Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes mit dem Iterationsverfahren nach v. Mises	160
5.5	Konvergenzverbesserung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten im Falle hermitescher Matrizen	161
5.6	Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren nach dem Iterationsverfahren von v. Mises	163
6.	Approximation stetiger Funktionen	166
6.1	Motivation	166
6.2	Approximationsaufgabe und beste Approximation	166
6.3	Approximation im quadratischen Mittel	169
6.3.1	Kontinuierliche Fehlerquadratmethode von Gauß	169
6.3.2	Diskrete Fehlerquadratmethode von Gauß	173

	Seite
6.4 Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome	178
6.4.1 Vorbemerkung	178
6.4.2 Beste gleichmäßige Approximation. Definition	179
6.4.3 Approximation durch Tschebyscheff-Polynome	180
6.4.3.1 Einführung der Tschebyscheff-Polynome	180
6.4.3.2 Darstellung von Polynomen als Linearkombination von Tschebyscheff-Polynomen	181
6.4.3.3 Beste gleichmäßige Approximation	183
6.4.3.4 Gleichmäßige Approximation	184
6.5 Approximation periodischer Funktionen	189
6.5.1 Vorbemerkungen	189
6.5.2 Approximation im quadratischen Mittel	189
6.5.3 Trigonometrische Interpolation	190
7. Interpolation durch algebraische Polynome	196
7.1 Aufgabenstellung	196
7.2 Interpolationsformeln von Lagrange	198
7.2.1 Formel für beliebige Stützstellen	198
7.2.2 Formel für äquidistante Stützstellen	200
7.2.3 Restglied der Interpolation	201
7.3 Das Interpolationsschema von Aitken für beliebige Stützstellen	202
7.4 Inverse Interpolation nach Aitken	207
7.5 Interpolationsformeln von Newton	209
7.5.1 Formel für beliebige Stützstellen	209
7.5.2 Formel für äquidistante Stützstellen	212
7.6 Interpolationsformeln für äquidistante Stützstellen mit Hilfe des Frazerdiagramms	213
7.7 Zur Abschätzung des Interpolationsfehlers	224
7.8 Entscheidungshilfen für die zweckmäßige Auswahl der verschiedenen Interpolationsformeln	225
7.9 Interpolation mittels kubischer Splines	227
7.9.1 Problemstellung	227
7.9.2 Definition der Splinefunktion	229
7.9.3 Berechnung der Splinefunktion	230
7.10 Entscheidungshilfen bei der Auswahl des zweckmäßigsten Verfahrens zur angenäherten Darstellung einer stetigen Funktion	235

7.11 Interpolation bei Funktionen mehrerer Veränderlichen	236
8. Numerische Differentiation	238
8.1 Vorbemerkungen und Motivation	238
8.2 Näherungsweise Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms	238
8.3 Näherungsweise Differentiation mit Hilfe kubischer Splines	240
8.4 Numerische Differentiation nach dem Romberg-Verfahren	242
8.5 Entscheidungshilfen bei der Auswahl des Verfahrens	246
9. Numerische Quadratur	248
9.1 Vorbemerkungen und Motivation	248
9.2 Interpolationsquadraturformeln	250
9.2.1 Konstruktionsmethoden	250
9.2.2 Newton-Cotes-Formeln	254
9.2.2.1 Die Sehnentrapezformel	255
9.2.2.2 Die Simpsonsche Formel	258
9.2.2.3 Die 3/8-Formel	262
9.2.2.4 Zusammenstellung von Hewton-Cotes-Formeln	265
9.2.3 Quadraturformeln von Maclaurin	267
9.2.3.1 Die Tangententrapezformel	267
9.2.3.2 Zusammenstellung von Maclaurin-Formeln	269
9.2.4 Die Euler-Maclaurin-Formeln	270
9.2.5 Fehlerschätzungsformeln	272
9.3 Tschebyscheffsche Quadraturformeln	274
9.4 Quadraturformeln von Gauß	276
9.5 Das Verfahren von Romberg	281
9.6 Konvergenz der Quadraturformeln	286
9.7 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	287
10. Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	289
10.1 Vorbemerkungen	289
10.2 Prinzip und Einteilung der numerischen Verfahren	290
10.3 Einschrittverfahren	291
10.3.1 Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy	291
10.3.2 Das Verfahren von Heun (Praedikator-Korrektor-Verfahren)	296

XIII

	Seite
10.3.3 Runge-Kutta-Verfahren	301
10.3.3.1 Allgemeiner Ansätze	301
10.3.3.2 Beschreibung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens	302
10.3.3.3 Heitere explizite Runge-Kutta-Verfahren	307
10.3.4 Fehlerschätzungsformeln	308
10.3.5 Verallgemeinerte Runge-Kutta-Verfahren	309
10.3.5.1 Implizite Runge-Kutta-Verfahren	309
10.3.5.2 Das Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren	309
10.4 Mehrschrittverfahren	312
10.4.1 Prinzip der Mehrschrittverfahren	312
10.4.2 Extrapolationsverfahren von Adams-Bashford	313
10.4.3 Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Houlton	318
10.4.3.1 Konstruktion des Verfahrens	318
10.4.3.2 Fehlerabschätzung und Fehlerschätzung	323
10.5 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	324
10.6 Stabilität	326
10.6.1 Vorbemerkungen	326
10.6.2 Stabilität der Differentialgleichung	326
10.6.3 Stabilität des numerischen Verfahrens	328
11. Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und bei Differentialgleichungen höherer Ordnung	333
11.1 Vorbemerkungen	333
11.2 Runge-Kutta-Verfahren	
11.2.1 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren	334
11.2.2 Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren	336
11.3 Mehrschrittverfahren	336
11.4 Bemerkungen über numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei Differentialgleichungen höherer Ordnung	338
Beispielverzeichnis	340
Literaturverzeichnis	341
Sachregister	348