

# ALGEBRA

HANS-JÖRG REIFFEN

Dozent an der Universität Bochum

GÜNTER SCHEJA

Wissenschaftlicher Rat und Professor an der Universität Münster

UDO VETTER

Dozent an der Technischen Universität Hannover



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT  
MANNHEIM / WIEN / ZÜRICH

HO CHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

## Inhalt

§ 1. <i>Der Begriff der Gruppe</i> . . . . .	9
Vorbemerkungen über Abbildungen. Permutationen. Zweistellige Verknüpfungen. Gruppen. Gruppentafeln. Allgemeines Assoziativgesetz. Potenzen.	
§ 2. <i>Homomorphe Abbildungen</i> . . . . .	19
Homomorphismen von Gruppen. Bilder und Kerne von Homomorphismen. Isomorphismen. Darstellbarkeit von Gruppen als Gruppen von Permutationen, Links- und Rechtstranslationen. Gruppe der Automorphismen einer Gruppe. Innere und äußere Automorphismen. Zentrum einer Gruppe. Abelsehe Gruppen. Induzierte Homomorphismen.	
§ 3. <i>Untergruppen</i> . . . . .	27
Untergruppen. Erzeugendensysteme von Gruppen. Zyklische Gruppen. Ordnung einer Gruppe. Links- und Rechtsklassen bzgl. Untergruppen. Index von Untergruppen. Ordnung-Index-Sätze.	
§ 4. <i>Invariante Untergruppen</i> . . . . .	41
Normale und charakteristische Untergruppen. Quotientengruppen. Homomorphiesatz. Sog. Zweiter Isomorphiesatz. Sätze über zyklische Gruppen. Einfache Gruppen. Kommutatoruntergruppe. Normalisator.	
§ 5. <i>Produkte von Untergruppen</i> . . . . .	63
Produkte von Teilmengen einer Gruppe. Schlichte Produkte. Anzahl der Elemente in Produkten von Untergruppen. Vertauschbare Untergruppen. Sog. Erster Isomorphiesatz. Direkte Produkte.	
§ 6. <i>p-Gruppen und Sylow-Untergruppen</i> . . . . .	58
Existenz von Untergruppen abelscher Gruppen. Konjugierte Gruppenelemente. Klassenzahl, Klassengleichung. Satz von SYLOW über die Existenz von Untergruppen beliebiger Gruppen. Satz von CAUCHY. p-Gruppen. Sylow-Untergruppen. Konjugierte Untergruppen. Sätze von SYLOW über Konjugiertheit und Anzahl der Sylow-Untergruppen einer Gruppe.	
§ 7. <i>Die endlichen symmetrischen Gruppen</i> . . . . .	65
Ordnung der symmetrischen Gruppe $S_n$ . Zyklen. Kanonische Zerlegung von Permutationen. Länge von Permutationen. Ge-	

rade und ungerade Permutationen. Zentrum und Kommutatoruntergruppe der Gruppen  $S_n$  und der alternierenden Gruppen  $A_n$ . Beweis, daß  $A_n$  einfach ist für  $n > 5$ . Ein Satz über transitive Untergruppen von  $S_n$ .

- § 8. *Auflösbare Gruppen*. . . . . 77  
 Auflösbare Gruppen. Auflösbarkeit endlicher  $p$ -Gruppen. Normalfolgen. Kompositionsfolgen. Auflösbarkeitskriterien.
- § 9. *Endliche erzeugte abelsche Gruppen*. . . . . 82  
 Direkte Produkte von Untergruppen abelscher Gruppen. Zerlegbare und unzerlegbare abelsche Gruppen. Zerlegbarkeit endlich erzeugter abelscher Gruppen in unzerlegbare zyklische Untergruppen. Darstellbarkeit endlich erzeugter abelscher Gruppen als Produkt ihrer Torsions-Untergruppe und einer torsionsfreien Untergruppe. Fundamentalsatz (Struktursatz) für endlich erzeugte abelsche Gruppen.
- § 10. *Ringe und Körper*. . . . . 91  
 Homomorphismengruppen. Ringe. Endomorphismenringe. Beispiele von Endomorphismenringen endlicher abelscher Gruppen. Ringe mit Einselement. Nullteiler. Körper. Einheitengruppe. Einheitengruppe des Endomorphismenringes einer abelschen Gruppe. Unterringe. Ring-Homomorphismen und -Isomorphismen. Darstellbarkeit eines Ringes als Ring von Endomorphismen. Integritätsringe. Charakteristik. Anzahl der Elemente endlicher Körper. Endomorphismenringe zyklischer Gruppen von Primzahlordnung. FROBENIUS-Homomorphismen.
- § 11. *Ideale und Restklassenringe*. . . . . 110  
 Ideale und Kerne von Homomorphismen. Restklassenringe. Endlich erzeugte Ideale. Hauptideale. Restklassenringe der ganzen Zahlen. Primideale. Maximale Ideale.
- § 12. *Die Primrestklassen-Gruppen*. . . . . 118  
 Eulersehe Funktion. Primrestklassen. Struktur der Primrestklassen-Gruppen.
- § 13. *Primkörper und Körper der Brüche*. . . . . 126  
 Teilkörper. Primkörper. Primkörper von Integritätsringen einer von Null verschiedenen Charakteristik. Körper der

- Brüche. Primkörper von Integritätsringen der Charakteristik Null. Darstellbarkeit von Integritätsringen als Unterringe von Körpern.
- § 14. *Zerlegung in Primfaktoren.* . . . . . 133  
 Unzerlegbare Elemente. Integritätsringe, in denen die Faktorisierung in unzerlegbare Elemente möglich ist. Beispiel:  $Z[i\sqrt{5}]$ , Faktorielle Ringe. Größter gemeinschaftlicher Teiler. Euklidische Ringe. Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Euklidischer Algorithmus.
- § 15. *Polynomringe.* . . . . . 150  
 Polynome, Polynomringe. Eindeutige Darstellung von Polynomen. Substitution. Grad eines Polynoms. Nullteiler und Einheiten in Polynomringen. Divisionsalgorithmus für Polynome. Euklidische Polynomringe. Primfaktorzerlegung in Polynomringen. Satz von GAUSS. Irreduzibilitätsuntersuchungen bei Polynomen. Kriterium von EISENSTEIN.
- § 16. *Nullstellen von Polynomen.* . . . . . 169  
 Polynomen zugeordnete Abbildungen. Nullstellen von Polynomen. Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren. Sätze über endliche Körper: Struktur ihrer multiplikativen Gruppe, Existenz von Teilkörpern, Struktur ihrer Automorphismengruppe. Existenz von Nullstellen. Einfache und mehrfache Nullstellen. Differentiation von Polynomen. Separable Polynome. Vollkommene Körper.
- § 17. *Körpererweiterungen.* . . . . . 183  
 Körpererweiterungen. Körperadjunktion. Grad einer Körpererweiterung, Gradsatz. Algebraische Elemente. Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen. Minimalpolynom. Algebraische Körpererweiterungen. Charakterisierung endlicher Körpererweiterungen. Algebraisch-abgeschlossene Hülle. Algebraisch-abgeschlossene Körpererweiterungen. Satz von E. STBINITZ: Charakterisierung endlicher einfacher Körpererweiterungen mittels ihrer Zwischenkörper.
- § 18. *Zerfällungskörper von Polynomen.* . . . . . 196  
 $\wedge$ -Homomorphismen,  $\wedge$ -Isomorphismen. Konjugierte Elemente einer Körpererweiterung. Zerfällungskörper: Existenz und Eindeutigkeit. Endgültige Klassifizierung der endlichen Körper. Charakterisierungen von Körpererweiterungen, die als

Zerfällungskörper von Polynomen auftreten. Normale Körpererweiterungen.

- § 19. *Separable und inseparable Körpererweiterungen*. . . . . 206  
 Separable Elemente. Satz vom primitiven Element. Separable und rein-inseparable Körpererweiterungen. Rein-inseparable Elemente. Charakterisierung rein-inseparabler Körpererweiterungen mittels der reinen Inseparabilität ihrer Elemente. Charakterisierung separabler einfacher Körpererweiterungen durch die Eigenschaften ihrer primitiven Elemente. Separable Hülle. Separabilitätsgrad, Inseparabilitätsgrad. Charakterisierung der Zerfällungskörper separabler Polynome.
- § 20. *Der Hauptsatz über endliche Körpererweiterungen*. . . . . 217  
 Galoisgruppe. Fixkörper. Beziehungen zwischen Galoisgruppen-Ordnung und Körpergrad, Satz von E. ARTIN. Charakterisierung von Galoiserweiterungen. Hauptsatz der Galoistheorie. Hauptsatz für endliche Galoiserweiterungen. Fundamentalsatz der Algebra. Berechnung der Galoisgruppe und der Zwischenkörper endlicher Galoiserweiterungen.
- § 21. *Die Einheitswurzeln*. . . . . 227  
 $n$ -te Einheitswurzeln. Kreisteilungskörper. Primitive  $n$ -te Einheitswurzeln. Kreisteilungspolynome. Primfaktorzerlegung der Kreisteilungspolynome. Galoisgruppen der Kreisteilungskörper. Radikale. Charakterisierung von Galoiserweiterungen mit zyklischer Galoisgruppe mittels einfacher Radikalerweiterungen.
- § 22. *Die Auflösung von Gleichungen*. . . . . 239  
 Radikalerweiterungen. Auflösbare Gleichungen und auflösbare Galoisgruppen. Beispiel von HILBERT. Nicht-Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung  $n$ -ten Grades. Historische Bemerkungen.
- § 23. *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*. . . . . 247  
 Konstruierbarkeit komplexer Zahlen. Klassische Konstruierbarkeitsprobleme: Quadratur des Kreises, Delisches Problem, Konstruktion des regulären  $w$ -Ecks, Dreiteilung eines Winkels.
- Anhang. Grundbegriffe der linearen Algebra*. . . . . 261  
 Vektorräume. Lineare Abhängigkeit. Erzeugendensysteme und Basen. Austauschatz von STEINITZ. Dimension von Vektorräumen. Lineare Abbildungen.
- Register*. . . . . 269