

# Topologie

## Eine Grundvorlesung

*von*

Univ.-Prof. Dr. Johann Cigler

*und*

Univ.-Dozent Dr. Hans-Christian Reichel

*Universität Wien*



**Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich**  
B. I.-Wissenschaftsverlag

INHALTSVERZEICHNIS

<u>§ 1. Einleitung und Grundbegriffe</u> .....	1
1.1. Mengen .....	4
1.2. Abzählbare Mengen (Bemerkungen zum Auswahlaxiom und zur Kontinuumshypothese) .....	6
1.3. Geordnete Mengen; der Hausdorffsche Maximalitäts- satz und der Wohlordnungssatz (Anwendungen, z.B. auf die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ; Hamelbasis) .....	11
<u>§ 2. Topologische Räume</u> .....	18
2.1. Umgebungen (Begriff des metrischen und topologischen Raumes; "klassische" Beispiele) .....	18
2.2. Offene Mengen (Teilräume; Sphären; Basen; endliche Produkte; Ordnungstopologie; Abzählbarkeitsaxiome)	21
2.3. Abgeschlossene Mengen (Abschlußoperator; Berührungspunkte; Häufungspunkte; isolierte Punkte) .....	25
2.4. Dichte Mengen (Separabilität) .....	27
2.5*. Vertiefende Beispiele topologischer Räume (endliche Räume; ein abzählbarer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt; $G_\delta$ -Punkte und $G_\delta$ -Mengen; Sorgenfrey-Gerade und -Ebene; offen-abgeschlossene Mengen; nulldimensionale Räume; lexikographische Ordnung) .....	29
2.6. Stetigkeit (Beispiele und verschiedene Zugänge sowie Charakterisierungen; Projektionsabbildung und endliche Produkte; schwache Topologien; die $S^1$ als Quotientenraum; Quotientenabbildungen und -räume) .	31
2.7*. Vertiefende Aufgaben (Begriffe und erste Bemerkungen zu Überlagerungsräumen; topologische Gruppen und Vektorräume)	37
2.8. Homöomorphismen (lokal-euklidische Räume; Tori; Beispiel und Bemerkungen zur Dimensions- und Gebietstreue im $\mathbb{R}^n$ )	38
2.9*. Ordinal- und Kardinalzahlen (die Räume $[0, \Omega)$ und $[0, \Omega]$ : ein erster Ausblick auf die Notwendigkeit, das Konzept der metrischen Räume in einen allgemeineren Rahmen zu stellen ("Notwendigkeit" topologischer Räume); ein erster Ausblick auf Überdeckungsseigenschaften und Metrisierbarkeit; die (allgemeine) Kontinuumshypothese; $ \mathbb{R} ,  C(\mathbb{R}) $ ; die Ordinalzahlen $\omega_\mu$ , die Kardinalzahlen $\aleph_\mu$ ) .....	41

<u>§ 3. Metrische Räume</u> .....	46
3.1. Beispiele und einfache Eigenschaften (separable metrische Räume) .....	46
3.2. Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen (Hausdorff-Räume; normale Räume) .....	51
3.3. Vollständigkeit metrischer Räume (Topologie der gleichmäßigen Konvergenz); die Räume $C^*(X)$ und $C(X)$ .....	53
3.4. Vertiefende Bemerkungen und Beispiele (u.a.: Banachscher Fixpunktsatz und eine Anwendung auf Integralgleichungen) .....	57
3.5. Der Satz von Baire (nirgendsdichte Mengen; magere Mengen; Mengen erster und zweiter Kategorie; der Satz von Baire für vollständig metrisierbare Räume) .....	59
3.6. Einige typische Anwendungsbeispiele aus der Topologie und der Reellen Analysis (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit; eine stetige reelle Funktion, die nirgends differenzierbar ist) .....	63
3.7. Das Cantorsche Diskontinuum .....	66
3.8. Kompaktheit (kompakte metrische Räume; einfachste Eigenschaften und Bedeutung kompakter Hausdorff-Räume; Lebesue-Zahl; gleichmäßig stetige reelle Funktionen) .....	67
3.9. Die Topologie der punktweisen Konvergenz. (Unendliche Produkte; Bemerkungen zum Produktverhalten topologischer Eigenschaften; die Michael-Gerade; die Nicht-Metrisierbarkeit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ) .....	74
<u>§ 4. Vollständig reguläre Räume, Pseudometriken</u> <u>(Uniforme Räume, erster Teil)</u> .....	82
4.1. Systeme von Pseudometriken, uniforme Räume (Beispiele; Produkte metrischer Räume) .....	82
4.2. Netze (Moore-Smith Folgen); (Häufungspunkte; Grenzwerte; das Hausdorffsche Trennungsaxiom; Riemann-integrierbare Funktionen auf $[a, b]$ ; "es gibt keine Topologie der Konvergenz fast überall"; eine Bemerkung über "topologische Strukturen"; siehe auch Schlußbemerkung und § 8) .....	85
4.3. Universelle Netze (Existenz ultrafeiner Netze; Filter; Ultrafilter) .....	90
4.4*. Eine Anwendung aus der Non-standard Analysis (unendlich kleine und unendlich große Zahlen; das Non-Standard Modell $\mathbb{R}^*$ ; Bemerkungen zum Infinitesimalen-Kalkül) .....	93
4.5. Trennungseigenschaften (Begriffsbildungen und Beispiele) .....	95

4.6. Vollständig reguläre Räume: eine topologische Charakterisierung uniformer Räume (Z-Mengen, eine Charakterisierung der Stetigkeit mittels konvergenter Netze) .....	98
4.7. Das Lemma von Urysohn (eine Charakterisierung normaler Räume) .....	103
4.8. Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen, der Satz von Tietze-Urysohn (und ein Ausblick auf wichtige Anwendungen dieses Satzes) .....	105
<u>§ 5. Kompakte Räume</u> .....	108
5.1. Grundlegende Eigenschaften und der Satz von Tychoff. (Die Rolle des Auswahlaxioms; Der Satz von Dini) .....	108
5.2. Produkte $\prod R_i$ und $\prod [0,1]_i$ und deren Teilräume (Einbettungs- und Metrisierungssätze. Peano-Kurven) ..	114
5.3. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung (Konstruktion und einige Anwendungen in der Topologie und Analysis; Bemerkungen über verschiedene Zugänge und Konstruktionsmöglichkeiten; der kategorientheoretische Aspekt; $\beta\mathbb{N}$ , $\beta(0,1)$ , $\beta(\mathbb{R})$ , eine Anwendung auf $\mathbb{R}^*$ ) ..	118
5.4. Lokalkompakte Räume (Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung und Anwendungen in der Analysis; lokalkompakte Hausdorff-Räume sind Bairesche Räume) .....	126
5.5. Mannigfaltigkeiten, Partition der Eins und parakompakte Räume (Einbettung kompakter endlichdimensionaler Mannigfaltigkeiten in einen passenden $\mathbb{R}^n$ ; parakompakte Räume - ein kurzer Ausblick auf die Metrisierungstheorie; Dimension; topologische Summen) .....	130
5.6. Der Satz von Stone-Weierstraß (Reelle und komplexe Version für kompakte Räume X und Anwendungen - z.B. trigonometrische Polynome) .....	137
5.7*. Der Satz von Stone-Weierstraß für nicht-kompakte Räume X; die kompakt-offene Topologie (verschiedene Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Satzes von Stone-Weierstraß; Approximation stetiger Funktionen auf $[0, \infty)$ ; die Topologie der kompakten Konvergenz, die kompakt-offene Topologie und ihre Rolle für allgemeine Funktionenräume; Kelley-Räume) ..	141
5.8*. Der Satz von Ascoli-Arzelà (gleichgradige Stetigkeit; Kelley-Räume) .....	146
<u>§ 6. Zusammenhängende Räume</u> .....	150
6.1. Zusammenhängende Räume, wegzusammenhängende Räume, unzusammenhängende Räume, (speziell für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und Anwendungen in der Analysis) .....	150

<u>§ 7. Homotopie und Fragen der Topologie des <math>\mathbb{R}^n</math></u> .....	155
7.1. Wege und Homotopie von Wegen, Fundamentalgruppe ...	155
7.2. Homotopie stetiger Abbildungen (relative Homotopie; Homotopieäquivalenz; einfach zusammenhängende Räume; der funktorielle Gesichtspunkt) .....	158
7.3. Die Fundamentalgruppe der $S^1$ (Hochheben von Wegen und Homotopien; Windungszahl; Begriff der Faserung; Dualität "Liften-Fortsetzen" stetiger Abbildungen)	162
7.4*. Vertiefende Bemerkungen (Abbildungsgrad für Funktionen $f: S^1 \rightarrow S^1$ und allgemeine Bemerkungen hierzu; Berechnung spezieller Fundamentalgruppen; ein Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen; die $S^n (n \geq 2)$ ist einfach zusammenhängend) .....	165
7.5. Der Brouwersche Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^2$ und Plausibilitätsbetrachtungen für seine Gültigkeit im $\mathbb{R}^n$ , Anwendungen .....	168
7.6. Homotopie und stetige Fortsetzung stetiger Funktionen, der Fundamentalsatz der Algebra (Äquivalente Formulierungen und Zugänge zum Brouwerschen Fixpunktsatz; antipodentreue Abbildungen; der Satz von Borsuk-Ulam; die Nicht-Homöomorphie von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ für $n \neq m$ ; stetige Vektorfelder (eine Einführung))	170
7.7*. Überlagerungen (Weitere Beispiele von Fundamentalgruppen; die projektive Ebene; Begriff der Faserung; Begriff des universellen Überlagerungsraumes) .....	178
7.8*. Höhere Homotopiegruppen (Verschiedene Zugänge; das topologische Exponentialgesetz) .....	185
<u>§ 8*. Uniforme Räume (2. Teil)</u> .....	192
8.1. Verschiedene Zugänge zur Theorie der uniformen Räume, Pseudometriken, Weil-Strukturen (Entourages), uniforme Überdeckungen; Metrisierbarkeit uniformer Räume; gleichmäßig stetige Abbildungen .....	192
8.2. Die Topologie uniformer Räume Uniforme Struktur kompakter Räume; uniforme Struktur parakompakter Räume; uniforme Strukturen topologischer Gruppen; uniforme Struktur der wichtigsten Funktionenräume .....	202
8.3. Produkte und Teilräume uniformer Räume Produktuniformität und Produkttopologie; Einbettung uniformer Räume in Produkte metrischer Räume .....	208
8.4. Vollständige uniforme Räume Cauchy-Netze; Vollständigkeit; Produkte und Teilräume vollständiger Räume; Vervollständigung uniformer Räume; Bemerkungen über den kategorientheoretischen Hintergrund; präkompakte (totalbeschränkte) uniforme Räume; Kompaktifizierungen, die Stone-Cech-Kompaktifizierung $\beta X$ als Vervollständigung der von $C^*(X)$ auf $X$ induzierten uniformen Struktur; reellkompakte Räume .....	210

8.5. Eine Bemerkung über Filter und Netze Cauchy-Filter; Bemerkungen über die Äquivalenz zwischen Filtern und Netzen; Vorteile der Filter; $\mathfrak{P}$ -Filter; $z$ -Filter; Konstruktion der Stone-Čech- Kompaktifizierung $\beta X$ als geeignet toplogisierte Menge aller $z$ -Ultrafilter auf $X$ ; eine Bemerkung über Wallman-Kompaktifizierungen .....	220
Schlußbemerkung .....	224
Anhang .....	228
Literaturverzeichnis .....	230
Register .....	236