

# FUNKTIONENTHEORIE

ERSTER BAND

VON

ERNST PESCHL

o. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BONN



---

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . . .	5
Abkürzungen und Bezeichnungen . . . . .	11
Literatur . . . . .	12

### KAPITEL I

#### Algebra und Geometrie der komplexen Zahlen

§ 1. Einführung der komplexen Zahlen als Matrizen . . . . .	13
§ 2. Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .	16
§ 3. Bewertung des Körpers der komplexen Zahlen . . . . .	16
§ 4. Deutung der Grundrechenoperationen in der euklidischen Ebene . . . . .	18
§ 5. Polarkoordinaten . . . . .	20
§ 6. Die binomische Gleichung . . . . .	21
§ 7. Analytische Geometrie mit Hilfe komplexer Zahlen . . . . .	22
7.1 Euklidische Bewegungen . . . . .	22
7.2 Geradengleichungen in komplexer Schreibweise . . . . .	23
7.3 Skalarprodukt und Dreiecksfläche . . . . .	24
7.4 Kreisgleichung . . . . .	24
§ 8. Kreisverwandtschaften . . . . .	24
8.1 Die komplex-projektive Gerade . . . . .	24
8.2 „Rechenregeln“ für $\infty$ . . . . .	27
8.3 Erzeugung und geometrische Grundeigenschaft . . . . .	28
8.4 Das Doppelverhältnis . . . . .	29
8.5 Fixpunkte und Normalformen der Möbiustransformationen . . . . .	30
8.6 Winkeltreue der Kreistransformationen . . . . .	32
§ 9. Die stereographische Projektion . . . . .	33
§ 10. Spezielle Kreisverwandtschaften . . . . .	35
10.1 Spiegelungen . . . . .	35
10.2 Die Diametralpunktbeziehung . . . . .	37
10.3 Bewegungen in der sphärischen Geometrie . . . . .	37
10.4 Bewegungen in der hyperbolischen Geometrie . . . . .	41
Übungsaufgaben . . . . .	48

## KAPITEL II

Topologische Grundbegriffe, Mengen und Folgen komplexer Zahlen,  
unendliche Reihen

§ 1. Einführung der Topologie in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . . . . .	50
§ 2. HAUSDORFFRÄUME . . . . .	53
§ 3. Folgen. Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . . . . .	54
§ 4. Kompaktheit. Kompaktifizierung lokalkompakter Räume . . . . .	56
§ 5. Kennzeichnung kompakter Mengen von $\mathbb{C}$ . Die Sätze von HEINE-BOREL und BOLZANO-WEIERSTRASS, Intervall- schachtelung. . . . .	58
§ 6. Zusammenhängende Mengen. Ebene Gebiete . . . . .	60
§ 7. Stetige Abbildungen, Kurven . . . . .	61
§ 8. Zerlegung einer Kurve, Summe zweier Kurven. Die Gruppe der 1-Ketten . . . . .	64
§ 9. Unendliche Reihen . . . . .	67
Übungsaufgaben . . . . .	70

## KAPITEL III

## Funktionen, reelle und komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

§ 1. Reelle und komplexe Differenzierbarkeit einer komplex- wertigen Funktion . . . . .	76
§ 2. Holomorphe Funktionen . . . . .	80
§ 3. Harmonische Funktionen . . . . .	81
§ 4. Winkeltreue einer durch eine holomorphe Funktion vermittelten Abbildung . . . . .	82
Übungsaufgaben . . . . .	85

## KAPITEL IV

## Integralsätze und Folgerungen. Umlaufzahl und nullhomologe Kurven

§ 1. Das komplexe Kurvenintegral . . . . .	89
§ 2. Die Umlaufzahl und nullhomologe Kurven . . . . .	94
§ 3. Der CAUCHYSche Integralsatz . . . . .	103
§ 4. Die CAUCHYSche Integralformel . . . . .	110
§ 5. Folgerungen aus der CAUCHYSchen Integralformel, Maximumprinzip . . . . .	115
§ 6. Die POISSONSche Integralformel . . . . .	121
Übungsaufgaben . . . . .	123

## KAPITEL V

## TAYLORentwicklung holomorpher Funktionen

§ 1. Reihen komplexer Funktionen . . . . .	126
§ 2. Gleichmäßig konvergente Reihen holomorpher Funktionen . . . . .	129
§ 3. Potenzreihen . . . . .	131
Übungsaufgaben . . . . .	143

## KAPITEL VI

## Elementare transzendente Funktionen

§ 1. Holomorphe Ergänzung reeller Funktionen . . . . .	145
§ 2. Die elementaren transzendenten Funktionen . . . . .	146
§ 3. Die Funktion $w = \log z$ . . . . .	151
Übungsaufgaben . . . . .	158

## KAPITEL VII

## LAURENTreihen, isolierte Singularitäten, Residuenkalkül

§ 1. LAURENTreihen . . . . .	159
§ 2. Isolierte Singularitäten . . . . .	163
§ 3. Der Residuensatz . . . . .	167
§ 4. Abbildung durch holomorphe Funktionen. Die Umkehrabbildung und die BÜRMAN-LAGRANGESche Reihe . . . . .	170
§ 5. Anwendung des Residuensatzes zur Berechnung bestimmter reeller Integrale . . . . .	174
§ 6. FOURIER-Entwicklungen . . . . .	181
Übungsaufgaben . . . . .	182

## KAPITEL VIII

## Erzeugung holomorpher und meromorpher Funktionen durch Grenzprozesse

§ 1. Die Sätze von MONTEL und VITALI . . . . .	186
§ 2. Der Satz von MITTAG-LEFFLER . . . . .	190
§ 3. Der Produktsatz von WEIERSTRASS . . . . .	193
Übungsaufgaben . . . . .	197

## KAPITEL IX

## Holomorphe Fortsetzung

§ 1. Die Homotopie in ebenen Gebieten . . . . .	199
§ 2. Holomorphe Fortsetzung . . . . .	204
§ 3. Begriff der RIEMANNschen Fläche . . . . .	208
Übungsaufgaben . . . . .	211

## KAPITEL X

## Konforme Abbildungen

§ 1. Problemstellung und Überblick . . . . .	215
§ 2. Automorphismen einfach zusammenhängender Gebiete. SCHWARZSches Lemma . . . . .	217
§ 3. Der RIEMANNsche Abbildungssatz . . . . .	221
§ 4. Die RIEMANNsche Fläche der Logarithmus-Funktion. Die universelle Überlagerungsfläche eines zweifach zusammenhängenden Gebietes . . . . .	226
§ 5. Die Automorphismen der punktierten Ebene und des Kreisringes . . . . .	229
§ 6. Die konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete auf Normgebiete . . . . .	234
§ 7. Das SCHWARZsche Spiegelungsprinzip . . . . .	236
§ 8. Verallgemeinerungen des SCHWARZschen Spiegelungs- prinzips . . . . .	239
§ 9. Die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung von Polygonbereichen auf die obere Halbebene . . . . .	241
§ 10. Die konforme Abbildung von Polygonbereichen . . . . .	245
§ 11. Abbildung spezieller Polygonbereiche. Doppeltperiodische Funktionen . . . . .	251
§ 12. Die Abbildung von Kreisbogenpolygonen . . . . .	256
Übungsaufgaben . . . . .	267
Sach- und Namenregister . . . . .	270