

# TRANSZENDENTE ZAHLEN

VON

CARL LUDWIG SIEGEL

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM

---

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

# INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort . . . . .	7
-------------------	---

## *Kapitel I. Die Exponentialfunktion*

§ 1. Die Irrationalität von $e$ . . . . .	9
§ 2. Der Operator $f(D)$ . . . . .	11
§ 3. Approximation von $e^x$ durch rationale Funktionen . . . . .	13
§ 4. Die Irrationalität von $e^a$ für rationale $a \neq 0$ . . . . .	14
§ 5. Die Irrationalität von $\pi$ . . . . .	15
§ 6. Die Irrationalität von $\tan a$ für rationale $a \neq 0$ . . . . .	16
§ 7. Die Funktion $P_1 e^{\rho_1 x} + \dots + P_m e^{\rho_m x}$ . . . . .	18
§ 8. Abschätzung von $R(1)$ . . . . .	20
§ 9. Abschätzungen für die Zahl $P_k(1)$ und ihren Nenner . . . . .	21
§ 10. Die Transzendenz von $e^a$ für reelle algebraische Zahlen $a \neq 0$ . . . . .	21
§ 11. Die Determinante von approximierenden Ausdrücken . . . . .	23
§ 12. Algebraische Unabhängigkeit . . . . .	24
§ 13. Ein neuer Restgliedausdruck . . . . .	27
§ 14. Die Interpolationsformel . . . . .	30
§ 15. Abschließende Bemerkungen . . . . .	32

## *Kapitel II. Lösungen linearer Differentialgleichungen*

§ 1. Funktionen vom Typ E . . . . .	34
§ 2. Zahlentheoretische Hilfssätze . . . . .	36
§ 3. Approximierende Ausdrücke . . . . .	38
§ 4. Normalsysteme . . . . .	40
§ 5. Die Koeffizientenmatrix der approximierenden Ausdrücke . . . . .	42
§ 6. Abschätzungen für $R_k$ und $P_{ki}$ . . . . .	44
§ 7. Der Rang der $E_1(\alpha), \dots, E_m(\alpha)$ . . . . .	46
§ 8. Algebraische Unabhängigkeit . . . . .	47
§ 9. Hypergeometrische E-Funktionen . . . . .	49
§ 10. Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .	52
§ 11. Bestimmung des Ausnahmefalls . . . . .	55

§ 12. Algebraische Beziehungen zwischen verschiedenen Besselfunktionen . . . . .	58
§ 13. Die Normalitätsbedingung für Besselfunktionen . . . . .	60
§ 14. Zusatzbemerkungen . . . . .	63

*Kapitel III. Die Transzendenz von  $a^b$  für irrationale algebraische  
Zahlen  $b$  und algebraische Zahlen  $a \neq 0, 1$*

§ 1. Der Beweis von Schneider . . . . .	67
§ 2. Der Beweis von Gelfond . . . . .	69
§ 3. Zusatzbemerkungen . . . . .	71

*Kapitel IV. Elliptische Funktionen*

§ 1. Abelsche Differentiale . . . . .	73
§ 2. Elliptische Integrale . . . . .	74
§ 3. Der approximierende Ausdruck . . . . .	76
§ 4. Beendigung des Beweises . . . . .	78
§ 5. Weitere Resultate . . . . .	81

<i>Literaturverzeichnis</i> . . . . .	85
---------------------------------------	----

<i>Sachverzeichnis</i> . . . . .	86
----------------------------------	----