

EINFÜHRUNG IN METHODEN UND ERGEBNISSE DER PRIMZAHLTHEORIE

VON

WOLFGANG SCHWARZ

PRIVATDOZENT

AN DER UNIVERSITÄT FREIBURG/BREISGAU



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT • MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Vorwort</i>	5
<i>Bezeichnungen</i>	9
<i>I. Einführung</i>	11
1. Primzahlen	11
2. Das Sieb des EBATOSTHENES.	12
3. Spezielle Primzahlen.	18
4. Arithmetische Funktionen, die Primzahlen darstellen	21
<i>II. Elementare Methoden</i>	25
1. Unendlichkeit der Menge der Primzahlen.	25
2. Quantitative Aussagen.	27
3. Ergebnisse von TCHEBYCHEFF.	33
4. Explizite Konstanten in TCHEBYCHEFFS Ergebnissen	42
5. TCHEBYCHEFFS zweites Ergebnis.	48
<i>III. Elementare Beweise des Primzahlsatzes</i>	50
1. Die Selbergsche Formel	50
2. Die Selbergsche Ungleichung	54
3. Elementarer Beweis des Primzahlsatzes nach V. NEVANXINNA	61
4. Elementarer Beweis des Primzahlsatzes nach E. WIRSING und TH. BANG	65
5. Herleitung von Lemma 4.1 aus der isoperimetrischen Ungleichung	71
<i>IV. Beweise des Primzahlsatzes mit analytischen Methoden</i>	76
1. Beweis des Primzahlsatzes über das Riemann-Lebesguesche Lemma	76
2. Beweis des Primzahlsatzes mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes	83
3. Eigenschaften der Zetafunktion.	87
4. Abschätzung der Zetafunktion in der Nähe der Geraden $\text{Re } s = 1$	92
5. Der Primzahlsatz mit Restglied	97
6. Abschätzung des Restgliedes nach unten. Die Riemannsche Vermutung.	103
7. Folgerungen aus dem Primzahlsatz.	105
8. Summen, die die Möbiussche Funktion enthalten	108

V. Taubersätze.114
1. Der Taubersatz von LANDAU und IKEHABA114
2. Anwendung des Ikehara'schen Taubersatzes auf den Beweis des Primzahlsatzes.121
3. Beweis des Primzahlsatzes mit Hilfe des Wienerschen Taubersatzes.122
4. Der Taubersatz von HABDY-LITTLEWOOD-KAEAMATA (Beweis nach H. KÖNIG).127
VI. Primzahlen in arithmetischen Folgen.135
1. Elementare Ergebnisse.135
2. Charaktere.137
3. DIEICHELTS Satz über die Primzahlen in der arithmetischen Folge.140
4. Anwendung von Taubersätzen.147
5. Der Satz von SIEGEL.150
6. Abschätzungen der L-Reihen.159
7. Der Primzahlsatz für die arithmetische Folge mit Restglied.165
VII. Der Satz von Goldbach-Vinogradov.172
1. Die Goldbach'sche Vermutung.172
2. VINOGBADOVS Abschätzung von Exponentialsummen mit Primzahlen.174
3. Der Satz von GOLDBACH-VINOGBADOV.183
Anhang.193
1. Abelsche partielle Summation.193
2. Vergleich von Summe und Integral. Eulersche Summenformel.194
3. Anwendungen der Eulerschen Summenformel.196
4. Die Symbole Groß-0 und Klein-o.200
5. Zahlen theoretische Funktionen.202
6. Eine Übungsaufgabe zum Residuensatz.206
7. Wichtige Sätze aus der reellen Analysis.207
8. Einige Eigenschaften langsam wachsender Funktionen.211
9. Übungsaufgaben.215
Literaturverzeichnis.218
Namenverzeichnis.225
Sachverzeichnis.226