

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

1. Teil

*Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe
und Körper*

VON

WOLFGANG GRÖBNER

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT INNSBRUCK



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT MANNHEIM

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---|----|
| I. Teil: Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe und Körper | 9 |
| Kapitel I. Gruppen, Ringe, Körper | 11 |
| § 1. Gruppen | 11 |
| § 2. Ringe | 13 |
| § 3. Körper | 15 |
| § 4. Quotientenkörper, Quotientenringe | 16 |
| § 5. Euklidische Ringe | 20 |
| § 6. ZPE-Ringe | 23 |
| § 7. Aufgaben und Ergänzungen | 25 |
| Kapitel II. Moduln und Ideale in Noetherschen Ringen | 28 |
| § 1. «R-Moduln | 28 |
| § 2. Ideale | 30 |
| § 3. Teilerkettensatz. Noethersche Ringe | 32 |
| § 4. Restklassenringe | 34 |
| § 5. Der Idealkörper eines Ringes | 37 |
| § 6. Isomorphiesätze | 41 |
| § 7. Primideale, Primär-ideale, irreduzible Ideale | 43 |
| § 8. Der Lasker-Noethersehe Zerlegungssatz | 49 |
| § 9. Ring- und Körpererweiterungen | 56 |
| §10. Aufgaben und Ergänzungen | 64 |
| Kapitel III. Polynomringe | 72 |
| § 1. Begriffe und Symbolik | 72 |
| § 2. Der polynomische Lehrsatz und die Taylorsche Formel | 74 |
| § 3. Homogene Polynome (Formen) | 76 |
| § 4. Quotientenringe von Polynomringen. Funktionenkörper. | 79 |
| § 5. Elimination | 80 |
| § 6. Aufgaben und Ergänzungen | 84 |
| Kapitel IV. Körpertheorie | 89 |
| § 1. Algebraische Funktionenkörper | 89 |
| § 2. Transzendente Körpererweiterungen | 90 |

| | |
|--|------|
| § 3. Algebraische Körpererweiterungen | .92 |
| § 4. Restklassenkörper von Primidealen | .97 |
| § 5. Aufgaben und Ergänzungen | .99 |
| <i>Kapitel V. Ganz abgeschlossene Ringe.</i> | .103 |
| § 1. Ganze algebraische Größen | .103 |
| § 2. Endliche Modulbasis für die ganze Abschließung eines Ringes. | .105 |
| § 3. Die ganze Abschließung von Restklassenringen | .109 |
| § 4. Einige Sätze für ganze abgeschlossen Ringe | .111 |
| § 5. Idealtheorie in ganz abgeschlossenen Ringen | .114 |
| § 6. Dedekind-Bereiche | .120 |
| § 7. Aufgaben und Ergänzungen | .124 |
| <i>Kapitel VI. Stellenringe.</i> | .128 |
| § 1. Definition und allgemeine Eigenschaften | .128 |
| § 2. m -primäre Ringe | .131 |
| § 3. Durchschnittssatz von KRULL | .137 |
| § 4. Hauptidealsatz von KRULL | .138 |
| § 5. Rang und Dimension | .140 |
| § 6. Reguläre Stellenringe | .144 |
| § 7. Leitideale | .147 |
| § 8. Bewertete Ringe | .152 |
| § 9. Vollständige Stellenringe | .154 |
| §10. Aufgaben und Ergänzungen. | .161 |
| <i>Kapitel VII. Potenzreihenringe.</i> | .172 |
| § 1. Potenzreihenringe als vollständige Hüllen | .172 |
| § 2. Weierstraßscher Vorbereitungssatz | .174 |
| § 3. Jeder Potenzreihenring ist Noethersch | .176 |
| § 4. Erweiterungs Ideale in Potenzreihenringen | .178 |
| § 5. Der Noethersche Fundamentalsatz | .180 |
| § 6. Aufgaben und Ergänzungen | .184 |
| <i>Bezeichnungen.</i> | .187 |
| <i>Literatur.</i> | .188 |
| <i>Namen- und Sachverzeichnis.</i> | .189 |

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

2. Teil

Arithmetische Theorie der Polynomringe

VON

WOLFGANG GRÖBNER

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT INNSBRUCK



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT • MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| I.Kapitel: Eliminationstheorie | 1 |
| §1. Nullstellen und Nullstellengebilde. Varietäten | 1 |
| (I) Begriff der Nullstelle. (II) Relationen. (III) Beispiele. (IV) Allgemeine Nullstelle. Nullstellensatz von Hilbert. (V) Reguläre lineare Transformationen. | |
| §2. Resultanten und Resultantenideale | 9 |
| (I) Sylvestersche Determinante. (II) Kroneckersches Resultantenideal. (III) Beispiele. | |
| §3. Eliminationsideale | 17 |
| (I) Eliminationstheorie. (II) Folge von Eliminationsidealen. (III) Projektionen. | |
| §4. Homogene Koordinaten und homogene Ideale | 23 |
| (I) Affine - projektive Koordinaten. (II) H-Ideale. (III) Eigenschaften. (IV) Lasker-Noetherscher Zerlegungssatz für H-Ideale | |
| §5. Aufgaben und Ergänzungen | 31 |
| II.Kapitel: Dimensionstheorie der Polynomideale | 37 |
| §1. Eine neue Definition der Dimension für Polynomideale | 37 |
| (I) Allgemeine Definition. (II) Neue Definition. (III) Für Primideale. | |
| §2. Die Primbasis für nulldimensionale Ideale | 40 |
| (I) Satz. (II) Konstruktion der Basispolynome. (III) Fortsetzung des Beweises. (IV) Monoidale Primbasis. | |
| §3. Die Primbasis für Primideale höherer Dimensionen | 47 |
| (I) $R_n \rightarrow R_n^*$. (II) Satz. (III) Beweis. (IV) Fortsetzung. (V) Äquidimensionalität. (VI) Beweis. (VII) Äquivalenz der beiden Definitionen der Dimension. | |
| §1. Reguläre und singuläre Primideale | 55 |
| (I) Singularitätenfreiheit der Polynomringe. (II) Basisdarstellungen (III) Primideale in Restklassenringen. (IV) Transitivität von regulär und Singular. (V) Hauptsatz über reguläre Stellenringe. (VI)-(VIII) Beweis. (IX) Folgerungen. | |
| §5. Geometrische Bedeutung der Primbasis. Monoidale Primbasis | 67 |
| (I) Hauptklassenideale - einfache Schnitte von Hyperflächen. (II) Monoidale Primbasis. (III) Reguläre Projektionen - birational äquivalente Hyperfläche. | |

| | |
|---|-----|
| §6. Irreduzibilitätskriterien | 71 |
| (I) Eisensteinsches Kriterium. (II) Reduzibilitätsbedingungen für ein Polynom. (III)-(VI) Beweise. | |
| (VII) Das Reduzibilitätsideal. (VIII) Spezialisierungen. (IX) Korollar, Beispiele. | |
| §7i Schnitte von Varietäten mit Hyperflächen | 78 |
| (I) Schnitte $(p,*)$. (II) Satz über Schnitte mit absolut Irreduziblen Formen. (III)-(IV) Beweise, Hilfsatz über regulär Potenzreihen. (V) Normale Primideale. Schnitt eines normalen Primideals mit einer Form. | |
| (VII) Dimension von $(a, <t>)$, inhomogen, (VIII) homogen. | |
| §8. Dimensionstheorie in Potenzreihenringen | 86 |
| (I) vollständige reguläre Stellenringe, Anfangsform. (II)'satz von Krull. (III)-(IV) Beweis. | |
| §9. Aufgaben und Ergänzungen | 91 |
| MI. Kapitel: Transformationen und Korrespondenzen | 105 |
| §1. Rationale Transformationen | 105 |
| (I) Homomorphismus der Funktionenkörper. (II) Algebraische Abhängigkeit. Automorphismengruppe. | |
| (III) Homogene Transformationen: eindeutige Abbildung des Idealkörpers. (IV) Eigenschaften. | |
| (V) Rang und Dimension. | |
| §2. Birationale Transformationen | 112 |
| (I) Zwischen Funktionenkörpern, Automorphismen, linear gebrochene, bilineare Gleichungen, monomische, Jonquieresche. (II) birationale Äquivalenz. (III) Beweis. | |
| (IV)'Rationale Primideale. (V) Isomorphie der homogenen Restklassenkörper. (VI) Reguläre Primideale. (VII) lokal. | |
| (VIII) Auflösung der Singularitäten, Monoidale Transformationen. | |
| §3« Veronesesche Transformationen und Ideale | 124 |
| (I) Definition. (II) Satz, Veronesesche Ideale. | |
| (III) Basis. (IV) Hilfssatz. (V) Basissatz. | |
| §4. Projektionen | 129 |
| (I) Homographien, Projektionen. (II) Birational für p , Eliminationsideale. (III) Idealkette. (IV) Reguläre, birationale Projektionen. (V) Darstellung von rationalen Transformationen. | |
| §5. Cremona-Transformationen | 134 |
| (I) Definition. (II) Formeln. (III) Hauptideale $Q(y) \leftrightarrow P(x)$. (IV) Gradbedingungen: $u < v^{n-1}, v < u^{n-1}$. | |
| (V) Jacobische Determinante. (VI) Homaloide Systeme. | |

| | |
|--|-----|
| §6. Korrespondenzen | 139 |
| (I) Allgemeine Zuordnungen. (II) BIH-Ideale. | |
| (III) Reduzible, irreduzible Korrespondenzen, | |
| (IV) Allgemeine Nullstelle derselben. (V) Involutionen | |
| (VI) Algebraische Systeme. (VII) Produkt $V(p_x) \cdot V(p_y)$, | |
| Segresches Ideale. | |
| §7. Aufgaben und Ergänzungen | 148 |
| Unirationale Primideale, Varietäten | |
| IV Kapitel: Hilbertfunktion und Syzygientheorie | 159 |
| §1. Die Hilbertfunktion | 159 |
| (I) Graduierter Ring. (II) Eigenschaften. (III) Triviale Ideale. | |
| (IV) Hauptsatz. (V) Postulationspolynom, Hilbertkoeffizienten, | |
| virtuelles arithmetisches Geschlecht. (VI) Umrechnungen, Schnitte. | |
| (VII) Virtuelles arithmetisches Geschlecht. | |
| §2. Nulldimensionale Ideale und Multiplizitätsbegriff | 168 |
| (I) Hilbertfunktion. (II) Nullstellen. (III) Allgemeine Nullstelle. | |
| (IV) Ordnung $h(q) - lh(p)$. | |
| (V) $\tilde{A}(\langle I \rangle) = I, \tilde{A}(P, \dots) + h(p)$. | |
| (VI) Multiplizitätsbegriff. | |
| (VII) Allgemeiner Satz über Ordnung. | |
| (VIII) Das inverse System. (IX) Bedingungsgleichungen. | |
| (X) Allgemeine Nullstelle eines Primärideals. | |
| §3. Ideale der Hauptklasse | 179 |
| (I) Definition. (II) Ungemischtheit. (III) Basisumformung. | |
| (IV) für H-Ideale. (V) Lemma. (VI) Korollar. | |
| (VII) 1. Ungemischtheitssatz. (VIII) 2. Ungemischtheitssatz. | |
| (IX)-(XI) Hilbertfunktion von Hauptklassenidealen. | |
| §4. Syzygienketten | 192 |
| (I) Syzygienmodul eines R-Moduls, Endlichkeit. | |
| (II) Basistransformationen, Sätze. (III) Homogene Matrizen. | |
| (IV) Homologische Dimension. (V) 4. Satz. (VI) Reversible Syzygienketten. | |
| (VII) 5. Satz. (VIII) 6. Satz. (IX) Endlichkeit der Syzygienketten. | |
| (X) 8. Satz. | |
| §5. Perfekte Ideale | 207 |
| (I) Reversible Syzygienketten. (II) Sätze. (III) Eigenschaften perfekter Ideale. | |
| (IV) Reversibel \rightarrow perfekt. (V) Perfekt \rightarrow reversibel. | |
| (VI) Beispiele. (VII) Syzygienformel. | |
| §6. Projektionen und Einbettungsräume | 215 |
| (I) Allgemeine Formeln. (II) Projektionsideale, Kette. | |
| (III) Satz $H(t; a)$. (IV) Erweiterungsideal a_{n+1} | |

| | |
|--|-----|
| (V) Allgemeine Lage des Projektionszentrums, Erhaltung von Dimension und Ordnung. (VI) Projektion von Primidealen, regulär, biregulär. (VII) Einbettungsraum. (VIII) Projektiv-normal. (IX) Einbettungssatz. (X) Reduzibilitätskriterium. | |
| §7. Sätze über Ordnungen und Schnittpunktzahlen | 226 |
| (I) Allgemeiner Multiplizitätsbegriff, Begriff der algebraischen Mannigfaltigkeit AM. (II) Schnitt von zwei AM: $h_0(a+b)=h_0(a)h_0(b)+K$. (III) Der spezielle Satz von Bezout. (IV) Erster allgemeiner Bezoutscher Satz. (V) Statische und dynamische Multiplizität. (VI) Zweiter allgemeiner Bezoutscher Satz. (VII) Beispiele. | |
| §8. Aufgaben und Ergänzungen | 238 |
| Hauptideale in ZPE-Ringen (15); reguläre Stellenringe $R/(n)$ (22); Macaulay-Ringe (23); homologische Theorie der Syzygienketten (25); Multiplizitätsbegriff von Samuel, Formeln (34). | |
| Bezeichnungen | 257 |
| Literatur | 257 |
| Namen- und Sachverzeichnis | 259 |