

# HÖHERE MATHEMATIK I

EINE EINFÜHRUNG  
1. TEIL

VON

DR. RER. NAT. GÜNTER HELLWIG  
O. PROFESSOR AN DER RHEINISCH-WESTFÄLISCHEN  
TECHNISCHEN HOCHSCHULE AACHEN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

---

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

# INHALTSVERZEICHNIS

## 1. Teil

### KAPITEL 1

<i>Die reellen Zahlen</i> .....	15
1.1 Vorbereitungen .....	15
1.2 Die Axiome der Gleichheit .....	16
1.3 Die Axiome der Addition und der Subtraktion .....	17
1.4 Die Axiome der Multiplikation und der Division .....	19
1.5 Die Anordnungsaxiome .....	23
1.6 Das Wohlordnungsaxiom .....	27
1.7 Beispiele zum Prinzip der vollständigen Induktion .....	33
1.8 Das Vollständigkeitsaxiom .....	37
1.9 Bedeutung des Vollständigkeitsaxioms .....	42
1.10 Der absolute Betrag einer reellen Zahl .....	48
1.11 Zwei einfache Ungleichungen .....	54
1.12 Einige Rechenoperationen für Mengen .....	57

### KAPITEL 2

<i>Funktionen</i> .....	60
2.1 Begriff der Funktion .....	60
2.2 Der Grenzwertbegriff .....	66
2.3 Rechenregeln für Grenzwerte .....	69
2.4 Rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte .....	79
2.5 Stetigkeit in $x_0$ .....	81
2.6 Rechts- und linksseitige Stetigkeit in $x_0$ .....	84
2.7 Stetigkeit in einem Intervall .....	85
2.8 Gleichmäßige Stetigkeit in einem Intervall .....	87
2.9 Sätze über in $[a, b]$ stetige Funktionen .....	90

## KAPITEL 3

	<i>Das bestimmte Integral</i> .....	98
3.1	Vorbereitende Betrachtungen zum Integralbegriff .....	98
3.2	Definition des bestimmten Integrals .....	100
3.3	Sätze über Unter- und Obersummen .....	103
3.4	Rechenregeln für integrierbare Funktionen .....	109
3.5	Die Integrierbarkeit der stetigen Funktionen .....	115
3.6	Integrierbarkeit der stückweise stetigen Funktionen ...	120
3.7	Rechenregeln für stückweise stetige Funktionen .....	124
3.8	Mittelwertsätze der Integralrechnung .....	126

## KAPITEL 4

	<i>Die Ableitung</i> .....	129
4.1	Vorbereitende Betrachtungen zur Ableitung .....	129
4.2	Definition der Ableitung .....	130
4.3	Rechenregeln für die Ableitung .....	136
4.4	Das Differential von $f$ .....	138
4.5	Die abgeleitete Funktion $f'$ .....	140
4.6	Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Kettenregel .....	141
4.7	Mittelwertsatz der Differentialrechnung .....	145
4.8	Die Umkehrfunktion .....	148

## KAPITEL 5

	<i>Differential- und Integralrechnung</i> .....	153
5.1	Stammfunktion .....	153
5.2	Stamm - Menge, Unbestimmtes Integral .....	158
5.3	Substitutionsregeln .....	168

## KAPITEL 6

<i>Ausbau der Differential- und Integralrechnung</i> . . . . .	175
6.1 Der natürliche Logarithmus . . . . .	175
6.2 Die Exponentialfunktion . . . . .	182
6.3 Die allgemeine Potenz . . . . .	187
6.4 Die allgemeine Exponentialfunktion und der allgemeine Logarithmus . . . . .	191
6.5 Die hyperbolischen Funktionen . . . . .	195
6.6 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung . . . . .	200
6.7 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	209
6.8 Die trigonometrischen Funktionen . . . . .	214
6.9 Die Arcus-Funktionen . . . . .	229
6.10 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (Fortsetzung von 6.7) . . . . .	233
6.11 Länge ebener Kurven . . . . .	255
6.12 Zwei Relationen zwischen $f, f'$ . . . . .	267
6.13 Die Funktion $f = 0$ . . . . .	271
Symbolverzeichnis . . . . .	I
Sachverzeichnis . . . . .	III

## 2. Teil

## KAPITEL 7

<i>Theorie der Konvergenz</i> . . . . .	285
7.1 Der Grenzwertbegriff bei Zahlenfolgen . . . . .	285
7.2 Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen . . . . .	289
7.3 Häufungspunkte, Teilfolgen . . . . .	291
7.4 Das CAUCHYSche Konvergenzkriterium bei Zahlenfolgen . . . . .	299
7.5 Das CAUCHYSche Konvergenzkriterium bei Funktionen . . . . .	302
7.6 Das CAUCHYSche Konvergenzkriterium bei unendlichen Reihen . . . . .	305
7.7 Rechenregeln für unendliche Reihen . . . . .	308
7.8 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen . . . . .	312

7.9	TAYLORSche Formel	322
7.10	TAYLORSche Reihe	328
7.11	Reihenentwicklungen für $\arctan x$ und $\log(1+x)$	337
7.12	Relative Extremwerte	346
7.13	Beweis von $T_1$ aus 6.8	349

## KAPITEL 8

	<i>Ergänzungen zur Integralrechnung</i>	352
8.1	$\int \frac{\alpha x + b}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx$ in $I$ ; $\alpha \neq 0, n = 1, 2, \dots$	353
8.2	$\int \frac{x^k}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} dx$ und $\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ in $I$ ; $\alpha \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots$	359
8.3	Integration rationaler Funktionen	365
8.4	Unbestimmte Integrale über trigonometrische Funktionen	371
8.5	Die SIMPSONSche Formel	376

## KAPITEL 9

	<i>Das STIELTJES-Integral</i>	387
9.1	Vorbereitende Betrachtungen	387
9.2	Definition des STIELTJES-Integrals	388
9.3	Sätze über Unter- und Obersummen	389
9.4	Rechenregeln für nach $g$ integrierbare Funktionen	390
9.5	Kriterien für die Existenz des STIELTJES-Integrals	392
9.6	Mittelwertsätze	395
9.7	Anwendungen in der Mechanik	396
	Anhang. Mathematische Sprechweisen und Beweistechnik	401
	Symbolverzeichnis	403
	Sachverzeichnis	405