

HÖHERE MATHEMATIK I

VON

GEORG AUMANN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Inhaltsverzeichnis

1. Reelle Zahlen

<u>1.1 Die verschiedenen Arten von Zahlen</u> . . .	15
<u>1.2 Das Rechnen</u>	17
1.2.1 Vollständige Induktion bei den natürlichen Zahlen	19
1.2.2 Das Rechnen mit ganzen Zahlen . . .	21
1.2.3 Das Rechnen mit den rationalen Zahlen	25
1.2.4 Das Rechnen mit Ungleichungen . . .	26
1.2.5 Das Rechnen mit den reellen Zahlen	27

2. Ebene analytische Geometrie

<u>2.1 Geometrische Deutung der Rechenoperationen auf der Zahlgeraden</u>	29
2.1.1 Addition	29
2.1.2 Multiplikation	30
2.1.3 Geometrische Eigenschaften von Verschiebung und Streckung . . .	30
2.1.4 Vektoren	31
2.1.5 Rechenregeln	31
2.1.6 Beziehungen zwischen Punkten und Vektoren (auf der Zahlgeraden) . .	32
<u>2.2 Zahlenebene</u>	33
2.2.1 Kartesische Koordinaten, Punkte, Vektoren	33
2.2.2 Die Determinante von 2 Vektoren	35
<u>2.3 Darstellungen einer Geraden</u>	38
2.3.1 Gerade durch den Ursprung	38
2.3.2 Beliebige Gerade	38
2.3.3 Implizite Gleichung einer Geraden	39
2.3.4 Gleichheit von 2 Geraden	40

<u>2.4 Länge und Winkel</u>	41
2.4.1 Länge eines Vektors	41
2.4.2 Winkel zweier Vektoren, inneres Produkt	42
2.4.3 Normalform der Gleichung einer Geraden	44
<u>2.5 Wechsel des Koordinatensystems</u>	45
2.5.1 Parallel verschobenes Koordina- tensystem	45
2.5.2 Gedrehtes Koordinatensystem	46
<u>2.6 Schiefwinkeliges Koordinatensystem</u>	48
<u>3. Räumliche analytische Geometrie</u>	
<u>3.1 Kartesisches Koordinatensystem,</u> Punkte, Vektoren	50
<u>3.2 Metrik</u>	51
<u>3.3 Parallelität von Vektoren, äußeres</u> Produkt	51
<u>3.4 Lineare Abhängigkeit</u>	54
3.4.1 Definition	54
3.4.2 Determinante von 3 Vektoren	55
<u>3.5 Lösung linearer Gleichungen mittels</u> Determinanten	56
<u>3.6 Darstellung von Ebene und Geraden</u>	58
3.6.1 Ebene	58
3.6.2 Gerade	60
3.6.3 Aufgaben	61
<u>3.7 Koordinatenwechsel</u>	62
3.7.1 Parallelverschiebung	62
3.7.2 Drehung	62
3.7.3 Aufbau eines Koordinatensystems mit vorgegebener Koordinaten- ebene	63
3.7.4 Invarianz	64
<u>3.8 Kugel und Kreiskegel</u>	65

<u>4. Kurven 2. Ordnung</u>	
<u>4.1 Kegelschnitte und Kurven 2. Ordnung</u>	67
<u>4.2 Normalform der Gleichung einer Kurve 2. Ordnung</u>	68
<u>4.3 Scheitelgleichung der Kegelschnitte</u>	72
<u>4.4 Brennpunkteigenschaften</u>	72
<u>4.5 Tangente an einen Kegelschnitt</u>	73
<u>5. Konvergenz auf der Zahlgeraden</u>	
<u>5.1 Konvergente Zahlenfolgen</u>	76
<u>5.2 Nullfolgen</u>	79
<u>5.3 Allgemeine Limesätze</u>	82
<u>5.4 Nochmals das Rechnen mit reellen Zahlen</u>	85
<u>5.5 Unendliche Reihen</u>	89
<u>5.6 Das dyadische Zahlssystem</u>	91
<u>6. Funktionen einer reellen Veränderlichen</u>	
<u>6.1 Funktion als Abbildung</u>	93
<u>6.2 Zeichnerische Darstellungen</u> (Funktionsleiter, Funktionsgraph)	94
6.2.1 Graphische Deutung der Konvergenz der geometrischen Reihe	96
<u>6.3 Stetigkeit einer Funktion</u>	97
6.3.1 Beispiele zum ϵ -Test	99
6.3.2 Allgemeine Eigenschaften stetiger Funktionen	99
6.3.3 Rationales Rechnen mit stetigen Funktionen	100
6.3.4 Zusammensetzung von Funktionen	101
6.3.5 Einseitige Konvergenz	101
<u>6.4 Gestaltliches über die Kurven rationaler Funktion</u>	102

<u>6.5 Die Zeichen $\pm \infty$</u>	106
6.5.1 Das Rechnen mit $\pm \infty$	107
6.5.2 Asymptoten einer Kurve $y=f(x)$	108
<u>6.6 Zwischenwertsatz</u>	109
<u>6.7 Satz vom Maximum</u>	110
<u>6.8 Monotonie</u>	112
6.8.1 Eigenschaften monotoner Funktionen	112
6.8.2 Satz von der Umkehrfunktion	112
<u>7. Differentiation</u>	
<u>7.1 Definition</u>	115
<u>7.2 Beispiele und Regeln</u>	118
<u>7.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung</u>	121
7.3.1 Rollescher Satz	121
7.3.2 Mittelwertsatz	122
7.3.3 Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung	122
7.3.4 Monotonie-Kriterium	123
7.3.5 Ableitung der Umkehrfunktion	123
<u>7.4 Potenzreihen</u>	123
7.4.1 Konvergenzkriterium	123
7.4.2 Leibniz-Kriterium	125
7.4.3 Absolute Konvergenz	125
7.4.4 Vergleichskriterium	126
7.4.5 Quotienten-Kriterium	126
7.4.6 Anwendung auf Potenzreihen	127
7.4.7 Konvergenzradius einer Potenzreihe	128
7.4.8 Differentiation von Potenzreihen	129

<u>7.5 Exponentialfunktion und verwandte</u>	
Funktionen	131
7.5.1 Exponentialfunktionen	131
7.5.2 Natürlicher Logarithmus	132
7.5.3 Allgemeine Exponentialfunktion	133
7.5.4 Potenzreihe für \ln	134
7.5.5 Binomische Reihe	135
7.5.6 Hyperbelfunktionen	136
<u>7.6 Kreisfunktionen</u>	138
7.6.1 \sin und \cos	138
7.6.2 \tan und \cot	141
7.6.3 Umkehrfunktionen (arcus- Funktionen)	142
7.6.4 Reihe für \arctan	144
7.6.5 Abelscher Grenzwertsatz	144
<u>7.7 de l'Hospitalsche Regeln</u>	147
7.7.1 Verallgemeinerter Mittel- wertsatz	147
7.7.2 Regel $\frac{0}{0}$	148
7.7.3 Regel $\frac{*}{\infty}$	149
<u>7.8 Kurvendiskussion</u>	151
7.8.1 Höhere Ableitungen	151
7.8.2 Konvexität	152
7.8.3 Kurvendiskussionsprogramm	153
7.8.4 Beispiele	156
<u>7.9 Taylorsche Entwicklung</u>	160
7.9.1 Höhere Berührung zwischen Kurven	160
7.9.2 Krümmungskreise einer Kurve $y=f(x)$	161

7.9.3	Taylorische Formel (mit Restglied)	164
7.9.4	Taylorische Reihe	165
<u>7.10</u>	<u>Näherungsweise Lösung von Gleichungen</u>	166
7.10.1	Methode der Einschließung durch Intervallhalbierungen	166
7.10.2	Regula falsi	167
7.10.3	Iterationsverfahren	168
7.10.4	Newtonsches Verfahren	169
<u>8.</u>	<u>Integration</u>	
<u>8.0</u>	<u>Einleitung</u>	171
<u>8.1</u>	<u>Flächenmessung</u>	172
<u>8.2</u>	<u>Stammfunktionen</u>	176
<u>8.3</u>	<u>Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung</u>	178
<u>8.4</u>	<u>Integrationsregeln</u>	179
<u>8.5</u>	<u>Integration der rationalen Funktionen</u>	183
8.5.1	Fundamentalsatz der Algebra	185
8.5.2	Partialbruchzerlegung	186
8.5.3	Auf Integrale rationaler Funktio- nen zurückführbare Integrale	189
8.5.4	Integration einer Potenzreihe	192
<u>8.6</u>	<u>Das bestimmte Integral</u>	193
8.6.1	Allgemeine Regeln	193
8.6.2	Spezielle Methoden	197
8.6.3	Flächeninhalt einer geschlosse- nen ebenen Kurve	201
<u>8.7</u>	<u>Uneigentliche Integrale (Integrallimiten)</u>	205
8.7.1	Kritische Integralgrenze $+\infty$	205
8.7.2	Kritische Integralgrenze im Endlichen	207
8.7.3	Integration über Unstetigkeiten hinweg	209

<u>8.8 Bogenlänge</u>	209
8.8.1 Definition	209
8.8.2 Bogenlänge bei parametrisierten Kurven	210
<u>9. Approximation und Interpolation</u>	
<u>9.1 Ersetzung der Kurve durch die Tangente</u>	213
<u>9.2 Ersetzung der Kurve durch die Sehne (lineare Interpolation)</u>	214
<u>9.3 Polynomische Interpolation</u>	216
<u>9.4 Algorithmus für die Interpolation</u>	217
<u>9.5 Quadratische Interpolation</u>	219
<u>9.6 Das Rechenschema von Horner</u>	222
<u>9.7 Interpolation bei gleichen Abständen (Differenzenrechnung)</u>	223
9.7.1 Das Rechnen mit Operatoren	224
9.7.2 Das Differenzschema	225
<u>9.8 Newtonsches Interpolationspolynom</u>	226
<u>9.9 Fehlerbetrachtungen</u>	227
9.9.1 Fehlerfortpflanzung im Δ - Schema	227
9.9.2 Ausgleich einer Meßreihe	228
9.9.3 Ableitungswerte aus dem Δ - Schema	228
<u>10. Komplexe Zahlen</u>	231
<u>Sachverzeichnis</u>	

HÖHERE MATHEMATIK II

VON

GEORG AUMANN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Lineare Algebra

<u>1. Lineare Gleichungen</u>	11
1.1 Der n-dimensionale Zahlenvektorraum \mathbb{R}^n	11
1.2 Eliminationsmethode bei der Auflösung eines linearen Gleichungssystems	14
1.3 Vektorraum, lineare Unabhängigkeit, Rang einer Vektorserie	20
1.4 Verfahren zur Rangbestimmung	24
1.5 Rang einer Matrix	26
1.6 Die drei Hauptsätze über lineare Gleichungen	28
1.7 Lineargebilde	30
1.8 Physikalische Dimensionsanalyse	32
<u>2. Matrizenrechnung</u>	33
2.1 $m \times n$ -Matrizen	34
2.2 Nicht-singuläre Matrizen	39
2.3 Lineare Abbildungen	40
2.4 Berechnung der inversen Matrix	46
2.5 Netzwerkalgebra, Boolesche Algebra	47
<u>3. Determinanten</u>	58
3.1 Definition der n-reihigen Determinante	58
3.2 Weitere Eigenschaften einer Determinante	59
3.3 Anwendungen der Determinanten	64
<u>4. Metrik</u>	68
4.1 Euklidische Geometrie im Punkt- raum (\mathbb{R}^n)	68
4.2 Kartesische Koordinatensysteme	68
4.3 Orthogonale Transformationen	73

<u>5. Quadratische Formen</u>	79
5.1 Hauptsatz über quadratische Formen . . .	80
5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Form	81
5.3 Beispiel	85
5.4 Vorzeichen einer quadratischen Form . . .	87
5.5 Über Flächen 2. Ordnung	90
<u>Teil II: Funktionen mehrerer Veränderlicher</u>	
<u>6. Funktionen von mehreren Veränderlichen</u> . .	96
6.1 Funktionen von 2 reellen Veränderlichen	96
6.2 Deutung und Veranschaulichungen . . .	97
6.3 Einengungen	100
6.4 Beschreibung der Definitionsbereiche .	100
6.5 Transformation einer Funktion	102
<u>7. Stetigkeit und Differentiation</u>	103
7.1 Stetigkeit einer Funktion	103
7.2 Beispiele	104
7.3 Differentiation	105
7.4 Vollständiges (totales) Differential, Kettenregel	108
7.5 Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung	112
7.6 Näherungsweise Lösung von zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten	113
7.7 Funktionen von 3 Veränderlichen . . .	114
<u>8. Ableitungen höherer Ordnung</u>	116
8.1 Der Vertauschbarkeitssatz	116
8.2 Umkehrung der Differentiation	117
8.3 Taylorsche Entwicklungen	123
8.4 Maxima, Minima	126

9. Implizite Funktionen	131
9.1 Eindeutige Auflösung einer Gleichung	131
9.2 Singuläre Punkte von $g(x,y) = 0$	134
9.3 Zur Diskussion der Niveaulinien	136
9.4 Eine Lokalisationsmethode	137
10. Ebene Abbildungen	140
10.1 Veranschaulichung	140
10.2 Satz von der Umkehrbarkeit einer ebenen Abbildung	142
10.3 Geometrische Bedeutung der Funktionaldeterminante	143
10.4 Das Verschwinden der Funktionaldeterminante	145
10.5 Multiplikationssatz für die Funktionaldeterminante bei Zusammensetzung von Abbildungen	146
10.6 Einhüllende einer Kurvenschar	146
11. Zweidimensionale Integrale	150
11.1 Flächeninhalt ebener Bereiche	150
11.2 Definition des 2-dimensionalen Integrals	152
11.3 Eigenschaften desselben	153
11.4 Das Doppelintegral	155
11.5 Dreidimensionale Integrale	158
11.6 Transformation des 2-dimensionalen Integrals	163
<u>Sachverzeichnis</u>	167

HÖHERE MATHEMATIK III

VON

GEORG AUMANN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Inhaltsverzeichnis

<u>1. Lösung einfacher Typen von gewöhnlichen</u>	
<u>Differentialgleichungen erster Ordnung.</u>	10
1.0 Definition und Beispiele	10
1.2 Transformationsprinzip	16
1.3 Spezielle Methoden	17
1.4 Singuläre Linienelemente (bei impliziten Differentialgleichungen).	25
1.5 Ausnahmepunkte	27
1.6 Orthogonaltrajektorien	30
1.7 Beispiele zur Stabilität und Instabilität	33
1.8 Periodische Lösungen von Differentialgleichungen	39
1.9 Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die auf Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführbar sind	42
<u>2. Existenz, Eindeutigkeit, Stetigkeit und</u>	
<u>Approximation von Lösungen einer Differentialgleichung.</u>	44
2.1 Das Anfangswertproblem und seine Eindeutigkeit	44
2.2 Die Existenz von Lösungen	47
2.3 Approximationsprinzip	52
2.4 Stetige Abhängigkeit der Integrale einer Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ von f	54
2.5 Stetige Abhängigkeit der Integrale von den Anfangswerten	55
2.6 Approximation von Lösungen durch Potenzreihenentwicklungen	56
<u>3. Systeme von gewöhnlichen Differential-</u>	
<u>gleichungen 1. Ordnung.</u>	61
3.1 Allgemeines	61
3.2 Lineare Differentialgleichungssysteme	64

<u>4. Lineare Differentialgleichungssysteme</u>	
<u>mit konstanten Koeffizienten.</u>	74
4.1 Matrizenweise Lösung	74
4.2 Methode der Synchronlösungen	75
4.3 Eliminationsmethode	85
4.4 Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	88
<u>5. Die lineare Differentialgleichung</u>	
<u>zweiter Ordnung.</u>	92
5.1 Das Anfangswertproblem	92
5.2 Sechs Sätze	92
5.3 Die Schwingungsgleichung	96
5.4 Gedämpfter Oszillator	99
5.5 Induktiv gekoppelte elektrische Schwingungskreise	101
<u>6. Die Laplace-Transformation.</u>	104
6.1 Definition und Beispiele	104
6.2 Bildliste der Laplace-Transformation	107
6.3 Allgemeine Sätze	109
6.4 Anwendung auf Differential- gleichungen	112
<u>7. Lineare Randwertaufgaben.</u>	114
7.0 Einleitung	114
7.1 Allgemeine lineare Randwertaufgabe bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung	115
7.2 Diskussion	116
7.3 Zwei Beispiele aus der Elastizitäts- theorie	118
7.4 Die Greensche Funktion	122
<u>8. Fourier-Reihen.</u>	127
8.1 Beispiele	127
8.2 Eindeutigkeitssatz	129
8.3 Approximationseigenschaften der Fourier-Reihen	130

8.4	Angenäherte harmonische Analyse	133
8.5	Identitätssatz	134
8.6	Darstellungssätze	135
8.7	Anwendungen der Fourier-Reihen	139
<u>9.</u>	<u>Integralsätze</u>	<u>153</u>
9.1	Parameterdarstellung einer Fläche im Raum	153
9.2	Messung auf einer Fläche (mit Bezug auf die Karte)	155
9.3	Vektorfelder im R^3	160
9.4	Wirbelfreie Vektorfelder	161
9.5	Der Stokes'sche Integralsatz	163
9.6	Der Gauß'sche Integralsatz	166
	<u>Literatur</u>	<u>170</u>
	<u>Sach- und Namenverzeichnis</u>	<u>171</u>