LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE

Band 2

VON

WILHELM KLINGENBERG

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT BONN

PETER KLEIN

WISS. MITARBEITER AN DER UNIVERSITÄT BONN

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

BI WISSENSCHAFTSVERLAG

Ausführliches Inhaltsverzeichnis von Band 2 :

Hinweise zur Benutzung des Buches o

Kapitel II : Vektorräume und lineare Abbildungen 1

(Fortsetzung aus Band 1)

§ 19 : Lineare Abbildungen und Matrizen 1

Matrizen (2) ; der Vektorraum $\mathfrak{M}_K(m,n)$ (4) ; Matrixdarstellung einer linearen Abbildung (5) ; Isomorphie zwischen $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\mathfrak{M}_K(m,n)$ (6) ; Praktische Bestimmung von Matrixdarstellungen (8) ; Komposition von linearen Abbildungen und Produkt von Matrizen (1o) ; links- bzw. rechts-invertierbare Matrizen (17) ; die Algebra $\mathfrak{M}_K(n,n)$ (19) ; die Gruppe $GL(n,K)$ (2o) ; Zentrum von $GL(n,K)$, $GL_K(V)$, $\mathfrak{M}_K(n,n)$, $L_K(V)$ (21) ; Transformation von Matrixdarstellungen (24) ; lineare Abbildungen mit gemeinsamer Matrixdarstellung (3o) ; konjugierte Endomorphismen und konjugierte Matrizen (32) ; weitere Beziehungen zwischen verschiedenen Matrixdarstellungen (33) ; Äquivalenz der Gleichung $f(x) = y$ mit einer Matrizengleichung (35) ; Transformation von Komponententupeln (39)

§ 2o : Der Rang einer Matrix 41

lineare Abbildungen von K^n nach K^m und Matrizen (41) ; Rang einer Matrix (46) ; transponierte Matrix und transponierte lineare Abbildung (47) ; elementare Umformungen von Matrizen (52) ; Klassifikation von linearen Abbildungen und Matrizen durch ihren Rang (54)

§ 21 : Lineare Gleichungssysteme und Matrizen 63

lineare Gleichungssysteme (63) ; Sätze über Lösungen (65) ; Eliminationsverfahren (67) ; Inversion von Matrizen mit Hilfe des Eliminationsverfahrens (71) ; Gleichungsdarstellung von Unterräumen (74)

§ 22 : Anhang : Semilineare Abbildungen und Einschränkung des Skalarbereichs eines Vektorraums 77

$\mathfrak{S}$-semilineare Abbildungen (77) ; $\mathfrak{S}$-Einschränkung des Skalarbereichs eines Moduls (78) ; Beziehungen zwischen einem Vektorraum und seiner $\mathfrak{S}$-Einschränkung (Unterräume, Basen, lineare Abbildungen etc.) (8o) ; anti-lineare Abbildungen bei komplexen Vektorräumen (88) ; komplexe lineare Abbildungen als reelle lineare Abbildungen (88)

Kapitel III : Determinanten 9o

§ 23 : Die symmetrische und die alternierende Gruppe 9o

Transitivitätsgebiete einer Permutation (9o) ; Zykeln (91) ; Zerlegung einer Permutation in disjunkte Zykeln (93) ; Transpositionen und Zerlegung einer Permutation in Transpositionen (94) ; Vorzeichen einer Permutation (95) ; die alternierende Gruppe (97)

§ 24 : Multilineare Abbildungen 98

Definition (98) ; alternierende, symmetrische, schiefsymmetrische multilineare Abbildungen (99) ; elementare Rechnungen mit alternierenden multilinearen Abbildungen (1o2)

§ 25 : Determinantenformen 1o7

die zu einer Basis gehörende Determinantenform (1o7) ; die kanonische Determinantenform det von K^n (1o9)

§ 26 : Die Determinante eines linearen Endomorphismus 11o

Definition und einfache Folgerungen (11o) ; Multiplikationssatz für Determinanten (111) ; die spezielle lineare Gruppe $SL_K(V)$ eines endlichdimensionalen Vektorraums (113)

§ 27 : Die Determinante einer quadratischen Matrix 115

Definition und einfache Folgerungen (115) ; Minoren und Bestimmung des Rangs einer Matrix mit Hilfe von Minoren (119)

§ 28 : Determinantenrechnung 121

Regel von Sarrus (123) ; Determinante von Dreiecksmatrizen (124) ; Rechenregeln für Determinanten (125) ; allgemeiner Laplace'scher Entwicklungssatz (128) ; Entwicklung nach einer Spalte oder Zeile (134) ; Vandermondsche Determinante (137) ; die adjungierte Matrix (139) ; Inversion von Matrizen mit Hilfe der adjungierten Matrix (14o) ; Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme (14o)

Kapitel IV : Normalformenproblem für quadratische Matrizen 142

Vorbemerkungen (142)

§ 29 : Polynome 144

die Algebra der Polynome in einer Unbestimmten über einem kommutativen Ring mit Eins (145) ; Gradformel (147) ; $R[X]$ als Integritätsring (148) ; Erweiterung von Ringhomomorphismen auf $R[X]$ (148) ; Ringhomomorphismen, Erweiterungsringe und Algebren (149); Einsetzen von Elementen aus einem Erweiterungsring in Polynome (151) ; Polynomialabbildungen (153) ; Euklidischer Algorithmus (155) ; Hauptidealringe (156);

größter gemeinsamer Teiler von Polynomen (157) ; Wurzeln (158) ; Polynomialabbildungen über unendlichen Körpern (159) ; Körper der Brüche eines Integritätsrings (16o) ; irreduzible Polynome (162) ; Zerlegung in irreduzible Faktoren (162) ; algebraisch abgeschlossene Körper (164) ; Fundamentalsatz der Algebra (164) ; reelle Polynome (165) ; Konstruktion eines Erweiterungskörpers, in dem ein vorgegebenes Polynom zerfällt (167)

§ 3o : Eigenwerte von linearen Endomorphismen 171

Eigenräume, Eigenwerte, Eigenvektoren (171) ; charakteristisches Polynom einer Matrix (174) ; charakteristisches Polynom eines Endomorphismus (177); Satz von Hamilton-Cayley (179) ; Bestimmung von Eigenwerten (181) ; Transformation auf Dreiecksform (185); Transformation auf Diagonalform (187) ; Charakterisierung von diagonalisierbaren Endomorphismen (189)

§ 31 : Die Jordansche Normalform 191

Normaldarstellung eines nilpotenten Endomorphismus (191); Haupträume, Hauptvektoren (198) ; Jordan-Matrizen und Jordansche Normalform (2o2) ; Transformation auf Jordansche Normalform (2o4) ; Praktische Bestimmung der Jordanschen Normalform (21o) ; Klassifikation aller Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums und aller quadratischen Matrizen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (213)

§ 32 : Anwendungen auf reelle Vektorräume 217

komplexe Vektorraum-Struktur auf reellen Vektorräumen (217); Komplexifizierung eines reellen Vektorraums (218) ; charakteristisches Polynom und Eigenwerte eines reellen Endomorphismus und seiner komplexen Erweiterung (222) ;

erweiterte Jordan-Matrizen und erweiterte Jordansche Normalform (224) ; Transformation auf erweiterte Jordansche Normalform (225) ; Klassifikation aller Endomorphismen eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums und aller reellen quadratischen Matrizen (231)

§ 33 : Anhang : Endlich-dimensionale Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ 234

endlichdimensionale Algebren (234) ; die Quaternionenalgebra $\mathbb{K}$ (236) ; "Jede endlich-dimensionale kommutative $\mathbb{R}$-Divisionsalgebra ist isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ " (241) ; Satz von Frobenius:" Jede endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Divisionsalgebra ist isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{K}$ " (244)

§ 34 : Anhang : Ein Satz von Wedderburn 247

Isotropiegruppen und Orbits von Darstellungen (247) ; Einheitswurzeln, primitive Einheitswurzeln und Kreisteilungspolynome über $\mathbb{C}$ (248) ; Satz von Wedderburn:" Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ" (25o)

Kapitel V : Euklidische und unitäre Vektorräume 253

§ 35 : Sesquilinearformen 253

Grundbegriffe und einfache Folgerungen (253)

§ 36 : Reelle und komplexe Skalarprodukte 258

Skalarprodukte (258) ; euklidische und unitäre Vektorräume (26o) ; SKP-Homomorphismen (= Homomorphismen von Vektorräumen mit Skalarprodukt) (261) ; die orthogonale bzw. unitäre Gruppe eines Vektorraums mit Skalarprodukt (263) ; kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{F}^{(I)}$ (264) ; der euklidische Vektorraum $\mathcal{L}^{o}[a,b]$ (266) ; Darstellungen endlicher abelscher

Gruppen (267) ; periodische lineare Abbildungen (268); Orthogonalität von Teilmengen (269) ; Projektionsoperatoren (271) ; Orthogonalität (Forts.)(274)

§ 37 : Normen und Metriken 278

Norm eines Vektors (278) ; Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (279) ; normierte Vektorräume (28o) ; Banach- und Hilberträume (281) ; normtreue Abbildungen (284) ; Einheitssphären (285) ; metrische Räume (286) ; metrisch treue Abbildungen und Isometrien (287) ; Vergleich der verschiedenen Homomorphismusbegriffe in Vektorräumen mit Skalarprodukt (288)

§ 38 : Orthonormierte Basissysteme 291

ON-Systeme und ON-Basen (291) ; Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren (293) ; Existenz von ON-Basen in Vektorräumen von höchstens abzählbarer Dimension (295) ; Approximation bzgl. endlichdimensionaler Unterräume (298) ; Winkel in euklidischen Vektorräumen (3o1) ; Fundamentalmatrizen (3o4) ; SKP-Homomorphismen und ON-Basen (3o8) ; "Unendlichdimensionale Hilberträume haben keine ON-Basis" (31o) ; der Hilbertsche Folgenraum (312) ; konvergente Orthogonalreihen in Hilberträumen (315) ; Besselsche Ungleichung (316) ; Fourier-Reihen (317) ; Charakterisierung vollständiger ON-Systeme von separablen Hilberträumen (317) ; Parsevalsche Gleichung (318) ; Klassifikation separabler Hilberträume (318) ; orthogonale und unitäre Matrizen (32o) ; die Gruppen $\mathbb{O}(n,\mathbb{R})$ und $\mathbb{U}(n,\mathbb{C})$ (321) ; die Gruppen $S\mathbb{O}(n,\mathbb{R})$ und $S\mathbb{U}(n,\mathbb{C})$ (322) ; Beziehungen zwischen orthogonalen bzw. unitären Matrizen und orthogonalen bzw. unitären Automorphismen (323)

§ 39 : Die adjungierte lineare Abbildung 326

Vorbetrachtung im endlichdimensionalen Fall (326) ; Definition und einfache Folgerungen (328) ; normale und $\mathfrak{E}$-selbstadjungierte Endomorphismen (331) ; normale, $\mathfrak{E}$-hermitesche, symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen (333)

§ 4o : Normaldarstellung normaler Endomorphismen (komplexer Fall) 335

Eigenräume normaler Endomorphismen (335) ; Normaldarstellung normaler Endomorphismen (336) ; Normaldarstellung $\mathfrak{E}$-selbstadjungierter, selbstadjungierter und anti-selbstadjungierter Endomorphismen (337) ; Normaldarstellung unitärer Automorphismen (338) ; Anwendung auf Matrizen (339) ; Charakterisierung diagonalisierbarer komplexer Endomorphismen durch normale Matrizen (339) ; Normaldarstellung periodischer linearer Abbildungen (34o)

§ 41 : Normaldarstellung normaler Endomorphismen (reeller Fall) 341

unitäre Erweiterung euklidischer Vektorräume (341) ; Normaldarstellung normaler Endomorphismen (342) ; Normaldarstellung selbstadjungierter Endomorphismen (344); Normaldarstellung anti-selbstadjungierter Endomorphismen (345) ; Normaldarstellung orthogonaler Automorphismen (346) ; Spiegelungen unitärer oder euklidischer Vektorräume (347) ; Normaldarstellung periodischer linearer Abbildungen reeller Vektorräume (35o) ; invariante Drehwinkel einer orthogonalen Transformation (351) ; Klassifikation aller orthogonalen Transformationen eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraums (351)

§ 42 : Drehungen zwei-dimensionaler euklidischer Vektorräume 352

orientierte $\mathbb{R}$-Vektorräume (352) ; Diskussion der Normaldarstellungen zweidimensionaler Drehungen (354); Charakterisierungen zweidimensionaler uneigentlicher Drehungen (355) ; Parametrisierung von $S\mathbb{O}(2,\mathbb{R})$ durch S^1 (355) ; $\mathbb{O}(2,\mathbb{R})$ ist nicht abelsch (357) ; Drehwinkel von eigentlichen zweidimensionalen Drehungen bzgl. einer Orientierung (358) ; orientierte Winkel (36o) ; ebene Drehungen n-dimensionaler euklidischer Vektorräume (364)

§ 43 : Drehungen drei-dimensionaler euklidischer Vektorräume 365

Diskussion der Normaldarstellungen; Drehachse, Drehebene (365) ; $S\mathbb{O}(3,\mathbb{R})$ ist nicht abelsch (368) ; Eulersche Winkel (37o) ; Bemerkungen zur Theorie des Kreisels (375) ; Darstellung von $S\mathbb{O}(3,\mathbb{R})$ durch Quaternionen (377) ; praktische Bestimmung einer zu einer speziellen Drehung gehörenden Quaternion (385) ; Eulersche Winkel in Quaternionen-Darstellung (386)

§ 44 : Drehungen vier-dimensionaler euklidischer Vektorräume 387

Darstellung durch Quaternionen (387)

Sachwortverzeichnis für Band 2 391

Verzeichnis einiger Standardbezeichnungen (für Band 2) 399