

DIFFERENTIALRECHNUNG I UND ABRISS DER LINEAREN ALGEBRA

VON

PETER DOMBROWSKI

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT KÖLN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Inhaltsverzeichnis.

Résumé der Differentialrechnung I

und

Abriß der Linearen Algebra.

	Seite
§ 1. <u>Mengen und Abbildungen.</u>	
1.1. Aussagen und aussagenlogische Funktoren	1
1.2. Aussageformen und prädikatenlogische Quantoren	4
1.3. Daten und Axiome über Mengen und Abbildungen	7
1.4. Bezeichnungen und Grundoperationen für Abbildungen	15
1.5. Kalkül der mengentheoretischen Operationen	17
Bild- und Urbildmengenbildung bei Abbildungen	19
§ 2. <u>Die reellen Zahlen \mathbb{R} und die Analysis der auf Teilmengen von \mathbb{R} definierten \mathbb{R}-wertigen Funktionen.</u>	
2.1. Der archimedisch-geordnete, vollständige Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen und die natürlichen Zahlen \mathbb{N}	21
2.2. Grundregeln für das Rechnen mit reellen Zahlen	27
2.3. Satz von der vollständigen Induktion	29
Endliche und unendliche Mengen	31
Rekursive Definition von Folgen (mit Beispielen)	34
Summen- und Produkt-Zeichen	36
Ganze und rationale Zahlen (\mathbb{Z} und \mathbb{Q})	41
Die g -adische Entwicklung der positiven natürlichen Zahlen ..	43
2.4. $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, Supremum (sup), Infimum (inf), Maximum und Minimum von Teilmengen von \mathbb{R}	45
2.5. Konvergenz und Limes von Folgen reeller Zahlen in \mathbb{R}	49
Limes superior, Limes inferior und Adhärenzwerte von Folgen in \mathbb{R}	53

I n h a l t s v e r z e i c h n i s .

	Seite
2.6. Unendliche Reihen von Folgen reeller Zahlen	57
Die g-adische Entwicklung der positiven reellen Zahlen	62
2.7. Algebraische und ordnungstheoretische Operationen für reellwertige Funktionen	65
Limes, Supremum, Infimum und unendliche Reihen von Folgen reellwertiger Funktionen	68
Ganz-rationale, gebrochen-rationale Funktionen und Potenzreihen einer reellen Veränderlichen	69
Interpolation mittels ganz-rationaler Funktionen	72
Definition der elementaren Funktionen \exp , \sin , \cos , \sinh , \cosh , tg , ctg , tgh , ctgh	74
2.8. Stetigkeit reellwertiger Funktionen einer reellen Veränderlichen	75
Stetigkeit der durch Potenzreihen definierten Funktionen ...	77
Haupteigenschaften stetiger Funktionen einer reellen Veränderlichen (u.a. Intervall- und Folgenkompaktheits- treue)	78
2.9. Häufungspunkte und innere Punkte von Teilmengen von \mathbb{R}	81
Limes reellwertiger Funktionen einer reellen Veränder- lichen in \mathbb{R}	83
Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen einer reellen Veränderlichen	87
Grundregeln der Differentiation (u.a. LEIBNIZ- und Kettenregel)	88
Differenzierbarkeit der durch Potenzreihen definierten reellwertigen Funktionen einer reellen Veränderlichen	92
Differentiation von \exp , \sin , \cos , tg , ctg , \sinh , \cosh	95
Notwendige Bedingung für das Vorliegen lokaler Extrema	95
2.10. Wachstumseigenschaften differenzierbarer Funktionen	97
Mittelwertsatz der Differentialrechnung	98
Stammfunktionen	99

I n h a l t s v e r z e i c h n i s .

	Seite
n-malige Differenzierbarkeit, n-te Ableitungen	101
Konvexität reellwertiger Funktionen einer reellen Veränderlichen	106
Die Regel von DE L'HOSPITAL	108
TAYLOR-Approximation differenzierbarer Funktionen	109
Hinreichende Bedingungen für das Vorliegen lokaler Extrema .	111
TAYLORScher Satz	113
2.11. Die natürliche Exponential- und Logarithmus-Funktion	
(zur Basis e), exp und ln	114
Exponentialfunktion und radioaktiver Zerfall	118
Die Potenzfunktion zu beliebigem Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$	121
Die Exponential- und Logarithmus-Funktion zu einer beliebigen Basis $a \in \mathbb{R}_+$, (BRIGGS'sche Logarithmen)	122
Gerade und ungerade Funktionen	128
Die Sinus- und Cosinus-Funktion, die Kreiszahl $\pi \in \mathbb{R}$	130
Sinus- und Cosinus-Funktion in der euklidischen Geometrie .	133
Die Schwingungs-Differentialgleichung (Anfangswertaufgabe) .	140
Die Tangens- und Cotangens-Funktion	142
Die Arkus-Funktionen	144
Die Hyperbel-Funktionen	149
Die Area-Funktionen	150
§ 3. <u>Abriß der Linearen Algebra.</u>	
3.1. Gruppen, abelsche Gruppen	152
Untergruppen, Gruppenhomomorphismen	156
3.2. Permutationen, die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_n , ($n \in \mathbb{N}_+$)	157
3.3. Körper (= kommutative Körper)	161
Die Körper \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} (=komplexe Zahlen)	164
Vektorräume über einem Körper	164

I n h a l t s v e r z e i c h n i s .

	Seite
Die Matrizen-Algebra über einem Körper	167
Lineare und multilineare Abbildungen von Vektorräumen	168
Lineare Unabhängigkeit in, Basen und Dimension von Vektorräumen. Rang und Defekt linearer Abbildungen	172
Beschreibung linearer Abbildungen und von Bilinearformen mittels Matrizen bzgl. geordneter Basen	177
Die Determinante einer quadratischen Matrix	179
Der Rang von Matrizen	180
Die allgemeine bzw. spezielle lineare Gruppe $GL(n, K)$ bzw. $SL(n, K)$	181
Algebren über einem Körper	184
Die HAMILTON-Konstruktion der \mathbb{R} -Algebren \mathbb{C} (= komplexe Zahlen), \mathbb{H} (= HAMILTONsche Quaternionen), \mathbb{O} (= CAYLEYSche Zahlen)	189
3.4. Das Lösen linearer Gleichungssysteme (numerische Version). ..	196
3.5. Das Lösen linearer Gleichungssysteme (invariante Version) ...	206
Parameter- und Gleichungs-Darstellung von Untervektorräumen und affinen Unterräumen von Vektorräumen	210
3.6. Orientierungen endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorräume	210
Euklidische innere Produkte für \mathbb{R} -Vektorräume	212
Die orthogonalen Gruppen $O(n)$ und $SO(n)$	214
Der Adjungierte eines Endomorphismus eines euklidischen Vektorraumes	216
Die Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum eines euklidischen Vektorraumes	218
SCHMIDT-Orthonormalisierung	219
Kongruente Abbildungen euklidischer Vektorräume	220
Die Orthogonalspiegelung an einem Untervektorraum eines euklidischen Vektorraumes	221
3.7. Die Determinante, die Spur und die charakteristische Funktion eines Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraumes.	224

I n h a l t s v e r z e i c h n i s .

	Seite
Eigenwerte von Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume, deren algebraische und geometrische Vielfachheiten	227
Diagonal- und Dreiecks-Matrizenform für Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume	231
Hauptachsen- bzw. Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen euklidischer Vektorräume	232
3.8. Kongruente Abbildungen des euklidischen \mathbb{R}^n	233
3.9. Rang, Definitheit und Index einer symmetrischen \mathbb{R} -Bilinearform	236
Hauptachsentransformation symmetrischer \mathbb{R} -Bilinearformen	238
Definitheitskriterien für symmetrische reelle Matrizen (Abschnittsdeterminanten-Kriterium, Cartesische Zeichen-Regel)	241
 Index	 244
 Literaturverzeichnis	 256