

# FELDTHEORIE I

VON

GERHARD PIEFKE

O. PROF. AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DARMSTADT



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT • MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

## INHALTSVERZEICHNIS

0. VEKTOREN . . . . .	13
0.1 Definitionen . . . . .	13
0.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar, Addition und Subtraktion von Vektoren . . . . .	15
0.3 Das skalare (innere) Produkt zweier Vektoren . . . . .	16
0.4 Das Vektorprodukt (äußeres Produkt) zweier Vektoren . . . . .	18
0.5 Spatprodukt, Vertauschungssatz, Entwicklungssatz. . . . . .	20
0.6 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter. . . . . .	22
1. DIE MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN . . . . .	24
1.1 Elektrostatik . . . . .	24
1.2 Stationäre Strömung, Verschiebungsstrom. . . . .	29
1.3 Elektromagnetismus . . . . .	32
1.4 Induktionsgesetz . . . . .	36
1.5 Die Maxwellschen Gleichungen für ruhende Medien in Integralform . . . . .	37
1.6 Die Maxwellschen Gleichungen für ruhende Körper in Differentialform . . . . .	39
1.6.1 Rotation (curl). . . . .	39
1.6.2 Stokesscher Satz. . . . .	41
1.6.3 Divergenz. . . . .	42
1.6.4 Gaußscher Satz . . . . .	43
1.6.5 Die Maxwellsche Differentialgleichung für ruhende Medien . . . . .	45
1.7 Weitere Begriffe und Formeln aus der Vektor- analysis . . . . .	46
1.7.1 Gradient (grad). . . . .	46
1.7.2 Nabla-Operator ( $\nabla$ ). . . . .	47

# Inhaltsverzeichnis

1.7.2.1	Definition und Anwendung	47
1.7.2.2	Koordinatenfreie Definition von $V$	50
1.7.3	Höhere Differentialquotienten	51
1.8	Gradient, Divergenz, Rotation, $A$ im krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem $x_1, x_2, x_3$	52
1.8.1	Allgemeine Formeln	52
1.8.2	Beispiele	58
1.9	Vektordifferentialoperationen bei Unstetigkeitsflächen im Feld	61
1.10	Greensche Sätze	64
2	POTENTIALFUNKTIONEN, VEKTORPOTENTIAL	66
2.1	Die Differentialgleichung der Potentialfunktion, Beispiele	66
2.1.1	Einige Lösungen von $\nabla^2 \phi = 0$	66
2.1.2	Potential einer Punktladung	68
2.2	Das Gesetz der ungestörten Superposition	69
2.3	Reziproke Radien (Spiegelung), Influenzproblem	71
2.4	Punktladung gegenüber einem dielektrischen Halbraum	77
2.5	Elektrischer Punktdipol, Kugel im homogenen Feld	80
2.5.1	Elektrischer Punktdipol	80
2.5.2	Leitende Kugel im homogenen Feld	81
2.5.3	Dielektrische Kugel im homogenen Feld	83
2.6	Die Potentialgleichung in der Ebene, konforme Abbildung	85
2.7	Vektorpotential, Gesetz von Biot-Savart	92
3	DER POYNTINGSCHER VEKTOR	95
3.1	Herleitung des Poyntingschen Vektors	95
3.2	Anwendung des Poyntingschen Vektors bei Gleichstrom. Energieströmung	97

3.3 Komplexer Poyntingscher Vektor . . . . .	99
4. RELAXATIONSZEIT, TELEGRAPHENGLEICHUNGEN . . . . .	104
4.1 Relaxationszeit . . . . .	104
4.2 Telegraphengleichungen . . . . .	105
5.2 EBENE WELLEN . . . . .	106
5.1 Ebene homogene Wellen im Dielektrikum . . . . .	106
5.2 Ebene homogene Wellen bei zeitlich sinus- förmigen Vorgängen ( $e$ , $u$ komplex). . . . .	112
5.2.1 Allgemeine Herleitung . . . . .	112
5.2.2 Ebene Wellen im Dielektrikum mit geringen Verlusten . . . . .	114
5.2.3 Ebene Wellen im Leiter . . . . .	114
5.3 Anwendung des komplexen Poyntingschen Vektors bei Leitern, Skinneffekt. . . . .	117
5.3.1 Eintretende Strahlung in einen Metall- block . . . . .	117
5.3.2 Stromverdrängung bei Rechteckschienen und ähnlichen Anordnungen unter Ver- nachlässigung der Randstreuungen . . . . .	119
5.3.3 Eisenverluste. . . . .	122
5.3.3.1 Eisenblech . . . . .	122
5.3.3.2 Verluste durch einen Eisenkern in ei- ner Spule. . . . .	124
5.4 Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen an einfachen Trennflächen . . . . .	127
5.4.1 Reflexion bei senkrechtem Einfall. . . . .	127
5.4.2 Aufhebung der Reflexion durch ein drit- tes Medium (senkrechter Einfall) . . . . .	130
5.4.3 Reflexion und Durchgang ebener Wellen bei schiefem Einfall auf eine Grenz- fläche . . . . .	134
5.4.3.1 Allgemeine Herleitung . . . . .	134

5.4.3.2	Bedingungen für das Verschwinden der Reflexion bei Dielektrika	138
5.4.3.3	Fresnelsche Formeln	140
5.4.3.4	Totale Reflexion bei Dielektrika	142
5.4.3.5	Reflexion an einer Leiteroberfläche	145
5.4.3.6	Reflexion und Felder bei Einfall auf einen unendlich guten Leiter ( $K = \infty$ )	147
5.5	Gruppengeschwindigkeit	153
5.6	Ebene Wellen längs Leitungen mit unendlicher Leitfähigkeit. Erste Näherung der Dämpfung	155
5.6.1	Leitungswellen bei Leitern ohne Verluste	155
5.6.2	Erste Näherung der Dämpfung der Leitungswellen	163
6.	DIE WELLENGLEICHUNG UND EINIGE LÖSUNGEN	165
6.1	Herleitung der Wellengleichung	165
6.2	Lösung der Wellengleichung in kartesischen Koordinaten	167
6.3	Lösung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten. Zylinderfunktionen	168
6.3.1	Separierung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten	168
6.3.2	Gammafunktion, Pi-Funktion, Psi-Funktion	170
6.3.3	Zylinderfunktionen	171
6.3.3.1	Zylinderfunktionen 1. Art (Besselsche Funktionen)	177
6.3.3.2	Zylinderfunktionen 2. und 3. Art (Neumannsche und Hankeische Funktionen)	181
6.3.3.3	Näherungen der Zylinderfunktionen für $ x  \ll 1$	183
6.3.3.4	Exakte Lösungen für $\nu = n + 1/2$	183
6.3.3.5	Näherungen der Zylinderfunktionen für $ x  \gg 1$ , $u$	185

6.3.3.6	Differentiationsregeln, Funktionalgleichung, Integraldarstellung der Besselschen Funktion	186
6.4	Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten	187
6.4.1	Die Wellengleichung in Kugelkoordinaten	187
6.4.2	Separierung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten	190
6.4.3	Die Legendreschen Polynome $P_n(x)$	192
6.4.4	Die erzeugende Funktion und Funktionalgleichung der Legendreschen Polynome	199
6.4.4.1	Die erzeugende Funktion	199
6.4.4.2	Funktionalgleichungen und Differentiationsregeln	201
6.4.5	Weitere Kugelfunktionen	203
6.4.5.1	Die Legendresche Funktion 2.Art $Q(x)$	203
6.4.5.2	Zugeordnete Legendresche Funktionen 1. und 2.Art $P^m(x)$ , $Q^m(x)$ . (Zugeordnete Kugelfunktionen 1. und 2.Art, tesserale Kugelfunktionen)	205
6.4.5.3	Allgemeine Kugelfunktionen	208
6.4.6	Näherungen für Kugelfunktionen bei $ ip  \ll 1$ und $ \text{ir}/2 - \text{im}  \ll 1$	209
7.	WELLENTYPEN AUF LEITUNGEN MIT UNENDLICH HOHER LEITFÄHIGKEIT	212
7.1	Das ebene Problem (Bandleitung, Rechteckhohlleiter)	212
7.1.7.1.1	Allgemeine Herleitung	212
7.1.2	Die verlustlose Bandleitung	215
7.1.3	Der verlustlose Rechteckhohlleiter	220
7.1.3.1	Die Wellentypen	220
7.1.3.2	Phasengeschwindigkeit $v$ und Gruppengeschwindigkeit $v_g$	223
7.1.3.3	Gleichungen für die Feldbilder	224

7.1.3.4 Die Leistung . . . . .	225
7.1.3.5 Der Energietransport, Energiegeschwindigkeit . . . . .	229
7.1.3.6 Sonderfälle ( $H_{10}$ -Welle, $E_{11}$ -Welle) . . . . .	232
7.1.3.7 Hohlraumresonatoren . . . . .	236
7.2 Das Kreiszyylinderproblem (runder Hohlleiter, koaxiale Leitung). . . . .	238
7.2.1 Allgemeine Herleitung . . . . .	238
7.2.2 Der verlustlose runde Hohlleiter . . . . .	241
7.2.2.1 Die Wellentypen . . . . .	241
7.2.2.2 Die Leistung . . . . .	244
7.2.2.3 Energietransport, Energiegeschwindigkeit . . . . .	248
7.2.2.4 Sonderfälle . . . . .	251
7.2.2.5 Hohlraumresonatoren . . . . .	256
7.2.3 Die verlustlose koaxiale Leitung . . . . .	257
7.2.3.1 Die allgemeine Lösung . . . . .	257
7.2.3.2 Die L-Welle der koaxialen Leitung als Sonderfall der allgemeinen Lösung. . . . .	259
Sachregister . . . . .	261