EINFÜHRUNG IN DIE ZAHLENTHEORIE

VON

DR. KARL-BERNHARD GUNDLACH
WISSENSCHAFTLICHER RAT UND PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT MÜNSTER

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH

BI· WISSENSCHAFTSVERLAG

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort . . . 5

I. *Einführung* . . . 11

1. Bemerkungen zum Stellwertsystem . . . 11
2. Einige Probleme der Zahlentheorie . . . 17

Aufgaben . . . 24

II. *Algebraische Vorbereitungen* . . . 25

1. Unitäre Moduln . . . 25
2. Kongruenzen . . . 30
3. Polynome . . . 35
4. Quotientenbildung . . . 40

Aufgaben . . . 44

III. *Teilbarkeit* . . . 45

1. Einheiten . . . 45
2. g.g.T. und k.g.V. . . . 48
3. Primelemente . . . 51
4. Noethersche Ringe und ZPE-Ringe . . . 53
5. ZPE-Halbgruppen . . . 58
6. Euklidische Ringe . . . 64
7. Die Sätze von Nagata und Gauß . . . 67

Aufgaben . . . 70

IV. *Zahlentheoretische Funktionen* . . . 72

1. Multiplikative Funktionen . . . 72
2. Die Möbiussche μ-Funktion und die Umkehrformel . . . 75
3. Die Eulersche ϕ-Funktion . . . 78

Aufgaben . . . 80

V. *Die Primzahlen* . . . 81

1. Vorbemerkungen . . . 81
2. Mersennesche und Fermatsche Primzahlen . . . 83
3. Die Funktion $\pi(x)$ . . . 85
4. Der Satz von Tchebycheff . . . 89

5. Angaben zur Primzahlverteilung 92
Aufgaben. 95

VI. *Restklassenringe*. 96
1. Direkte Summen 96
2. Summenzerlegungen von Restklassenringen. 100
3. Abelsche Gruppen 105
4. Endliche Körper. 108
5. Die Restklassenringe $\mathbb{Z}/(p^k)$ 111
6. Indizes und Numeri 114
7. Das Lösen von Kongruenzen. 117
Aufgaben. 121

VII. *Quadratische Reste*. 122
1. Potenzreste. 122
2. Charaktere 125
3. Legendre-Symbol und Jacobi-Symbol. 127
4. Zahlencharaktere und Kronecker-Symbol. 135
Aufgaben. 141

VIII. *Algebraische Zahlkörper* 142
1. Probleme, die auf Erweiterungen von $\mathbb{Z}$ führen. . . . 142
2. Körpererweiterungen. 147
3. Modulbasen 152
4. Ganzheit 157
5. Spur, Norm und Diskriminante 164
6. Die Hauptordnung 170
Aufgaben. 175

IX. *Die Arithmetik im Zahlkörper*. 177
1. Divisoren. 178
2. Dedekindsche Ringe 187
3. Die Klassenzahl. 196
4. Die Zerlegung der Primzahlen 200
5. Die Differente 204
Aufgaben. 209

X. *Einheiten* 211
1. Einheitswurzeln. 211
2. Die Einheiten reell-quadratischer Zahlkörper 213
3. Fortsetzung von Homomorphismen 219
4. Normale Erweiterungen. 227
5. Einfache Erweiterungen 231
6. Gitter 235
7. Der Dirichletsche Einheitensatz. 238
Aufgaben. 242

XI. *Der Satz von Minkowski*. 243
1. Der Gitterpunktsatz. 244
2. Anwendungen des Gitterpunktsatzes. 248
Aufgaben. 252

XII. *Relativerweiterungen*. 254
1. Divisoren für endlich-algebraische Erweiterungen . . 255
2. Fortsetzung von Divisoren und Divisornorm. 259
3. Basissätze 264
4. Differente und Diskriminante 273
5. Schachtelungssätze 284

XIII. *Die lokale Theorie*. 287
1. Bewertungen. 288
2. Approximations- und Unabhängigkeitssätze 293
3. Fortsetzung von Bewertungen. 299

Bezeichnungen 302
Literaturverzeichnis. 304
Namen- und Sachverzeichnis. 307