

# INTEGRATION GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Lie-Reihen (mit Programmen)

Runge-Kutta-Methoden

VON

GERHARD WANNER

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT  
INNSBRUCK



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT • MANNHEIM/ZÜEICH

HOCHSCHULTASCHE NB ÜCHER- VERLAG

# *Inhaltsverzeichnis*

## KAPITEL I

EINLEITUNG	1
1.1. Problemstellung	2
1.2. Der Sinn numerischer Methoden	3
1.3. Schrittweises Fortsetzen der Lösungen	4
1.4. Fehler	5

## KAPITEL II

### POTENZREIHEN

11.1. Potenzreihenlösungen	8
11.2. Rekursive Berechnung der Koeffizienten	10
11.3. Verwirklichung im Programm	15
11.4. Anwendungsbeispiele	17
11.5. Fehlerabschätzungen	21
11.6. Übertragungsmatrizen	22
11.7. Berechnung der Übertragungsmatrizen	24
11.8. Rekursionsformeln für Ausdrücke mit einem zusätzlichen Operator	26
11.9. Tabelle der Rekursionsformeln	28
11.10. Rekursionsformeln für weitere Operationen	30

## KAPITEL III

### LIE- REIHEN (STÖRUNGSFORMEL)

111.1. Der Vertauschungssatz	36
111.2. Die Störungsformel von Gröbner	37
111.3. Die Restformel von Knapp	39
111.4. Potenzreihen als Spezialfall	41
111.5. Wahl der Näherungslösungen	42

## Inhaltsverzeichnis

111.6. Ordnung der Methode	44
111.7. Numerische Auswertung , Quadraturformeln	46
111.8. Einige Werte der Koeffiziententabelle	49
111.9. Effektive Formeln	53
III.10. Wahl der Ordnungen $m$ , $s$ und $k$	54
111.11. Fehlerabschätzung	56
111.12. Numerische Beispiele	59
111.13. Konvergenz der Iteration	60
III.14. Die Methode von Picard als Spezialfall	63

### KAPITEL IV

#### REIHEN MIT MEHRFACHEN INTEGRALEN

IV.1. Die Integralgleichung von Gröbner	65
IV.2. Herleitung im nichtanalytischen Fall	68
IV.3. Reihen mit mehrfachen Integralen	72
IV.4. Methode von Poincarè als Spezialfall	75
IV.5. Formel von Chen als Spezialfall	78
IV.6. Ein Vertauschungssatz	79
IV.7. Ableitung der Störungsformel im nichtanalytischen Fall	81
IV.8. Eine Volterrasche Integralgleichung für die Lösung	82
IV.9. Spezialfälle	83

### KAPITEL V

#### RUNGE-KUTTA-METHODEN

V.1. Motivation	86
V.2. Einfachste Methoden	89
V.3. Allgemeine Theorie	92

## Inhaltsverzeichnis

V.4. Beweis	96
V.5. Runge-Kutta-Fehlberg	101
V.6. Numerisches Beispiel, Methodenvergleich	105
V.7. Implizite Fehlberg-Formeln	112
V.8. Bemerkungen zur numerischen Auswertung	120
V.9. Runge-Kutta-Formeln mit mehrfachen Knoten	123

### KAPITEL VI

#### SCHRITTWEISES FORTSETZEN DER LÖSUNGEN

VI.1. Schrittweitensteuerung	128
VI.2. Optimale Schrittweitensteuerung	130
VI.3- Numerische Beispiele	135

### KAPITEL VII

#### RANDWERTPROBLEME

VII.1. Beispiel. Zweipunkt Randwertproblem	141
VII.2. Formeln für allgemeine Probleme	143

### KAPITEL VIII

#### FORTRAN-PROGRAMM FÜR DIE LIE-REIHEN-METHODE

VIII.1. Programmbeschreibung	146
VIII.2. Eingabe der Funktionen $f_i(x,y)$	147
VIII.3. Eingabe der Daten	151
VIII.4. Bedeutung der Eingabedaten	152
VIII.5. Ausgabe	153
VIII.6. Beschreibung der Programme	155
VIII.7. Programmprotokolle	156

LITERATURVERZEICHNIS	169
INDEX	176