

SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 65/65a

ANALYTISCHE GEOMETRIE

DR. KARL PETER GROTEMEYER
o. Professor der Mathematik an der Freien Universität Berlin

3., neubearbeitete Auflage

Mit 73 Abbildungen



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals C. J. Göschen'sche Verlagshandlung • J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung • Georg Reimer • Karl J. Trübner • Veit & Comp.

BERLIN 1964

Inhaltsverzeichnis

Seite

| | |
|--|----|
| Literaturverzeichnis..... | 6 |
| I. Einleitung..... | 7 |
| II. Die Vektoralgebra | |
| 1. Definition der gebundenen und freien Vektoren..... | 7 |
| 2. Die Addition von Vektoren..... | 9 |
| 3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar..... | 9 |
| 4. Die Subtraktion von Vektoren..... | 10 |
| 5. Beispiele..... | 12 |
| 6. Der Begriff der linearen Abhängigkeit..... | 16 |
| 7. Das innere Produkt (skalares Produkt)..... | 17 |
| 8. Das äußere Produkt (Torielles Produkt)..... | 20 |
| 9. Das Spatprodukt..... | 22 |
| 10. Das dreifache Vektorprodukt..... | 24 |
| 11. Mehrfache Produkte..... | 25 |
| III. Das Koordinatensystem | |
| 1. Darstellung der Vektoren durch Zahlentripel..... | 26 |
| 2. Das Rechnen mit Spaltendarstellungen..... | 28 |
| 3. Anwendungen und einfache Beispiele..... | 30 |
| IV. Geraden und Ebenen | |
| 1. Die Hessesche Normalform..... | 32 |
| 2. Ebene durch zwei sich schneidende Geraden..... | 35 |
| 3. Ebene durch Punkt und Gerade..... | 35 |
| 4. Schnitt von Ebene und Gerade..... | 36 |
| 5. Schnitt zweier Ebenen..... | 37 |
| 6. Das Ebenenbüschel, das Ebenenbündel..... | 38 |
| 7. Winkel zweier Ebenen..... | 40 |
| 8. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden..... | 41 |
| 9. Windschiefe Geraden..... | 42 |
| 10. Gerade durch Punkt und zwei windschiefe Geraden..... | 44 |
| 11. Das hyperbolische Paraboloid..... | 46 |
| 12. Projektion auf eine Ebene..... | 50 |
| 13. Spiegelung am Punkt, an der Geraden, an der Ebene..... | 51 |
| V. Kugeln | |
| 1. Die Kugelgleichung..... | 62 |
| 2. Schnitt von Gerade und Kugel, Kugeltangenten..... | 63 |
| 3. Die Potenz eines Punktes für die Kugel..... | 64 |
| 4. Der Schnitt zweier Kugeln..... | 55 |
| 5. Die Potenzebene zweier Kugeln, die Potenzgerade..... | 58 |

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-------|
| VI. Der Matrizenkalkül | Seite |
| 1. Definition und Multiplikation von Matrizen | 60 |
| 2. Die Addition von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl | 64 |
| 3. Die Nullmatrix, die Einheitsmatrix, das Transponieren | 65 |
| 4. Determinante einer Matrix, adjungierte Matrix, Inverse Matrix | 66 |
| 5. Einige Folgerungen | 67 |
| 6. Zeilen- und Spaltendarstellungen von Matrizen | 68 |
| 7. Abriss über lineare Gleichungen | 71 |
| VII. Affine Abbildungen | |
| 1. Die Parallelverschiebung | 74 |
| 2. Definition der affinen Abbildung | 75 |
| 3. Einfache Eigenschaften der Affinität | 78 |
| 4. Weitere Eigenschaften der Affinität. Determinante der Abbildung, ausgeartete Affinitäten, Scherungsaffinitäten | 79 |
| 5. Bestimmung einer Affinität durch Original- und Bildpunkte | 81 |
| 6. Die Parallelprojektion | 82 |
| 7. Die affine Gruppe | 83 |
| VIII. Bewegungen | |
| 1. Definition und Eigenschaften | 85 |
| 2. Der Orthogonalisierungsprozeß, Konstruktion orthogonaler Matrizen | 87 |
| 3. Einführung eines neuen Koordinatensystems | 87 |
| 4. Fixelemente von Bewegungen | 89 |
| 5. Eigentliche Bewegungen | 92 |
| 6. Uneigentliche Bewegungen (Umlegungen) | 94 |
| 7. Tabellarische Übersicht | 96 |
| 8. Die Gruppe der Bewegungen | 97 |
| IX. Ähnliche (äquiforme) Abbildungen | |
| 1. Definition der ähnlichen Abbildung | 98 |
| 2. Einfache Eigenschaften der ähnlichen Abbildung | 99 |
| X. Die Flächen 2. Ordnung | |
| 1. Definition der F_2 | 100 |
| 2. Klassifikation und Aufzählung der F_2 | 101 |
| 3. Kurze Beschreibung der F_2 | 105 |
| 4. Schnitt von Gerade und Quadrik, Tangentialebene, Doppelpunkt | 110 |
| 5. Diametralebenen (Durchmesserebenen) einer Quadrik | 112 |
| 6. Mittelpunkte und Mittelpunktsquadriken | 113 |
| 7. Die Hauptachsentransformation | 115 |
| 8. Das charakteristische Polynom | 116 |
| 9. Eigenwerte und Eigenvektoren | 118 |
| 10. Durchführung der Hauptachsentransformation | 120 |
| 11. Beispiele | 122 |
| 12. Der Rang orthogonal äquivalenter Matrizen | 124 |
| 13. Die Diskriminante | 125 |
| 14. Kennzeichnung der Quadriken durch Invarianten | 126 |

| | |
|--|-----|
| 15. Spezielle Quadrikenklassen; Diametralebenengesamtheit. einer Quadrik | 134 |
| 16. Die Eichtkegel und der Asymptotenkegel einer Quadrik | 136 |
| 17. Ebene Schnitte einer Quadrik | 138 |
| 18. Die Kreisschnittebenen einer Quadrik | 143 |
| 19. Das System zyklischer Quadriken | 151 |
| 20. Geschichtliches über die Quadriken | 152 |

XL Einführung in die Projektive Geometrie des Raumes

| | |
|---|-----|
| 1. Homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten, der projektive Raum | 155 |
| 2. Das Dualitätsprinzip | 158 |
| 3. Kollineationen, Korrelationen | 162 |
| 4. Die Projektive Geometrie, einfache Invarianten | 163 |
| 5. Der Hauptsatz der Projektiven Geometrie | 165 |
| 6. Die linearen Gebilde des P_3 und projektive Koordinaten derselben | 167 |
| 7. Einstufige Gebilde, das Doppelverhältnis | 168 |
| 8. Weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses; harmonische Punktepaare | 173 |
| 9. Involutionen | 175 |

XII. Behandlung der Quadriken im Rahmen der Projektiven Geometrie

| | |
|--|-----|
| 1. Flächen zweiter Ordnung und Flächen zweiter Klasse | 177 |
| 2. Das singuläre Gebilde einer F_2 bzw. F^2 : der Rang | 177 |
| 3. Tangente, Berührungsebene, Berührungspunkt | 179 |
| 4. Konjugierte Elemente in bezug auf ein quadratisches Gebilde | 182 |
| 5. Pol und Polarebene | 184 |
| 6. Reziproke Polaren | 186 |
| 7. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach STAUDT | 187 |
| 8. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach STEINER | 181 |
| 9. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach MAGNUS | 192 |
| 10. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach SEYDEWITZ | 193 |
| 11. Der Trägheitssftz für quadratische Formen | 195 |
| 12. Die projektive Einteilung der F_2 bzw. F^2 | 196 |

XIII. Ergänzungen

| | |
|---------------------------------------|-----|
| 1. Vektorräume | 200 |
| 2. Lineare Abbildungen und Matrizen | 204 |
| 3. Dualer Raum, inneres Produkt | 207 |
| 4. Tensorprodukt, äußere Produkte | 208 |
| 5. Normierte Vektorräume | 211 |
| 6. KLEINSche Räume, Erlanger Programm | 212 |

| | |
|----------------------------|-----|
| Namen- und Sachverzeichnis | 215 |
|----------------------------|-----|