

EBENE UND SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE

DR. PHIL. GERHARD HESSENBERG
weil. ord. Prof. an der Technischen Hochschule Berlin

Fünfte Auflage durchgesehen von

DR. HELLMUTH KNESER
o. Prof. an der Universität Tübingen

Mit 60 Figuren



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals C. J. Göschen'sche Verlagshandlung • J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung • Georg Reimer • Karl J. Trübner • Veit & Comp.

BERLIN 1957

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung.	
1. Der Funktionsbegriff.	9
2. Die Ermittlung der Funktionswerte.	10
3. Die Berechnungsmethoden der Elementargeometrie	12
4. Trigonometrie und Elementargeometrie.	15
Erster Teil: Ebene Trigonometrie.	
Erstes Kapitel: Das rechtwinklige Dreieck.	
5. Die trigonometrischen Funktionen spitzen Winkel. 17	
a) Sinus und Tangente, b) Kosinus und Kotan-	
gente. c) Sekante und Kosekante, d) Die Kom- plementensätze. e) Die trigonometrischen Tafeln.	
6. Die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke . . .	21
7. Erste Anwendungen.	23
a) Das gleichschenklige Dreieck, b) Das Rechteck. c) Der Sehnensatz.	
8. Die algebraischen Gleichungen zwischen den Funk- tionen desselben Winkels.	24
a) Allgemeine Divisionssätze, b) Der Pythagorei- sche Lehrsatz.	
Zweites Kapitel: Die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel.	
9. Der erste Quadrant	27
a) Kartesische Koordinaten, b) Polarkoordinaten. c) Sinus und Kosinus, d) Der Komplementensatz.	
10. Der zweite Quadrant	30
a) Sinus und Kosinus, b) Der Vierteldrehungssatz, c) Der Supplementensatz.	

	Seite
§ 11. Beliebige Phasen	34
a) Die Skala auf dem Einheitskreis. b) Sinus und Kosinus.	
§ 12. Die Drehungs- und Umklappungssätze	37
a) Die Drehungssätze, b) Die Umklappungssätze.	
c) Verwandte Phasen.	
§ 13. Tangente und Kotangente	40
a) Definition, b) Drehungs- und Umklappungssätze der Tangente, c) Geometrische Darstellung, d) Verlauf der Tangente und Kotangente, e) Bestimmung der Phase durch ihre Funktionen.	
Drittes Kapitel: Das schiefwinklige Dreieck.	
§ 14. Die Sinus der Dreieckswinkel	45
a) Die Höhenformel. b) Die Inhaltsformel. c) Der Sehnensatz, d) Der Sinussatz.	
§ 15. Anwendungen	46
§ 16. Die Kosinus der Dreieckswinkel	50
a) Die Projektionsformel, b) Die Kosinusformel.	
c) Der Kosinussatz	
§ 17. Anwendungen	51
§ 18. Die Tangenten der halben Dreieckswinkel	53
a) Die Tangentenformel, b) Anwendung.	
§ 19. Die Formeln von Mollweide und Napier	55
a) Die Formeln von Mollweide, b) Der Tangentensatz, c) Anwendung.	
Viertes Kapitel: Die Additionstheoreme.	
§ 20. Die Addition und Subtraktion der Winkel	58
a) Bau der Formeln; Stichproben, b) Die Vertauschbarkeit der Phasen, c) Umkehrung einer Phase. d) Vierteldrehung einer Phase, e) Komplement einer Phase, f) Verwandte Phasen, g) Vielfache von 90° . h) Zwei Formeln und ein Quadrant, i) Eine Formel und zwei Quadranten.	
§ 21. Beweise der Additionstheoreme	63
a) Erster, b) zweiter, c) dritter, d) vierter Beweis.	
§ 22. Die Addition und Subtraktion der Sinus und Kosinus	67
§ 23. Das Additionstheorem der Tangente	68
a) Folgerungen aus den Formeln (I). b) Desgl. aus (XII)	

	Seite
§ 24. Doppelte und halbe Winkel.	70
a) Die Funktionen des doppelten Winkels, b) Sinus und Kosinus des halben Winkels, c) Die Tangente des halben Winkels, d) Quadranten und Vorzeichen.	
§ 25. Die Bedeutung der Additionstheoreme.	72

Fünftes Kapitel: Geometrische Anwendungen der Additionstheoreme.

§ 26. Ableitung der Dreieckssätze aus dem Kosinussatz	73
a) Der Sinussatz und die Tangentenformel, b) Der Winkelsummensatz, c) Die Formeln von Mollweide und Napier. d) Weiteres Formelmaterial. Übungen.	
§ 27. Rationale Dreiecke	75
§ 28. Polygonzüge	77
a) Phasen und Vektoren, b) Die Projektionen eines Polygonzuges, c) Die Berechnung der Schlußlinie.	
§ 29. Anwendungen	81
a) Reguläre Polygonzüge, b) Polygonzüge mit zwei Seiten, c) Die reinquadratische Gleichung zwischen \sin und \cos . d) Das Dreieck.	

Sechstes Kapitel: Das Viereck.

§ 30. Die Teildreiecke	87
a) Bezeichnungen, b) Die Zahl d. unabhängigen Stücke, c) Die Gleichung zwischen den Seiten und Diagonalen.	
§ 31. Die Gleichungen zwischen den Winkeln	91
a) Die Ecken- und Dreiecks-Winkelsummen, b) Die Sinusgleichungen, c) Das Sehnen viereck. d) Berechnung der Winkel aus vier gegebenen.	
§ 32. Inhaltsformeln und besondere Vierecke.	96
a) Der Inhalt und die Seiten, b) Der Inhalt und die Diagonalen, e) Das Gelenkviereck, d) Das Sehnenviereck, e) Das Trapez.	

Zweiter Teil: Sphärische Trigonometrie.

Siebentes Kapitel: Vorbereitungen aus der sphärischen Geometrie.

§ 33. Die Kreise auf der Kugel	101
a) Groß- und Kleinkreise, b) Der sphärische Ab-	

	stand, c) Die sphärische Längenmessung, d) Das natürliche Winkelmaß (Bogenmaß), e) Das sphärische Zweieck, f) Pol und Polare.	
§ 34.	Das sphärische Dreieck107
	a) Eulersche Dreiecke, b) Das Scheiteldreieck. c) Die Nebendreiecke, d) Der Inhalt des sphärischen Dreiecks, e) Das Polardreieck.	
§ 35.	Aufgabe und Methode der sphärischen Trigonometrie.114
	a) Die Grundaufgaben, b) Die Bedingungen der Lösbarkeit, c) Das Dreikant, d) Die Polarecke, e) Sphärische Trigonometrie und Stereometrie.	

Achtes Kapitel: Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§ 36.	Die Grundformeln119
	a) Der „sphärische Pythagoras“. b) Ein Winkel und zwei Seiten, c) Zwei Winkel und eine Seite, d) Die Napiersche Regel.	
§ 37.	Die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke122
	a) Die sechs Grundaufgaben; Zahl der Lösungen. b) Bedingungen für die gegebenen Stücke.	
§ 38.	Geometrische Ergänzungen124
	a) Spitze Katheten, b) Der Vertauschungssatz. c) Anwendungen des Vertauschungssatzes.	

Neuntes Kapitel: Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

§ 39.	Die ganzen Winkel und Seiten126
	a) Die Nebendreiecke, b) Der Sinussatz, c) Der erste Kosinussatz, d) Der zweite Kosinussatz. e) Rechnerische Herleitung des zweiten Kosinussatzes, f) Der Kotangentensatz.	
§ 40.	Die halben Winkel und Seiten129
	a) Die halben Winkel, b) Die halben Seiten, c) Geometrische Deutungen.	
§ 41.	Die Formeln von Mollweide und Napier131
§ 42.	Die Formeln von L'Huilier und Serret133
§ 43.	Die Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke135

Dritter Teil: Berechnung und algebraische Anwendung der trigonometrischen Funktionen.

Zehntes Kapitel: Elementare Berechnungsmethoden.

§ 44.	Die regulären Polygone140
§ 45.	Die Funktionen kleiner Winkel141
	a) Die Berechnung des Bogenmaßes, b) Die Berechnung des Sinus, c) Die Berechnung des Kosinus.	
§ 46.	Sphärische und ebene Trigonometrie144

Elftes Kapitel: Der Moivresche Satz.

§ 47	Die Addition von Vektoren144
§ 48.	Die Multiplikation von Vektoren146
§ 49.	Die multiplikative Zerlegung148
	a) Reine Streckungen, b) Halbdrehungen, c) Viertel-drehungen. d) Reine Drehungen überhaupt, e) Potenzen und Wurzeln, f) Einheitswurzeln.	
§ 50.	Die additive Zerlegung150
	a) Reeller und imaginärer Teil, b) Das Rechnen mit komplexen Zahlen, c) Der Zusammenhang beider Zerlegungen.	
§ 51.	Der Moivresche Satz153
	a) Die Additionstheoreme. b) Die Funktionen der Vielfachen eines Winkels, c) Die Potenzen des Sinus und Kosinus.	
§ 52.	Die unendlichen Reihen155

Zwölftes Kapitel: Die Methode der Hilfwinkel.

§ 53.	Trigonometrische Logarithmierung157
§ 54.	Trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichung159
§ 55.	Trigonometrische Auflösung der kubischen Gleichung	161
§ 56.	Beispiele kubischer Gleichungen164
	Anhang: Übungsbeispiele.168