

Elementare Zahlentheorie

von

Prof. Dr. Friedhelm Padberg

Universität Bielefeld

Wissenschaftsverlag

Mannheim/Wien/Zürich

Inhalt

Einleitung	9
<i>I. Teilbarkeitsrelation</i>11
1. Definition11
2. Eigenschaften12
3. Teilmengen14
4. Veranschaulichung durch Hasse-Diagramme16
<i>II. Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie</i>20
1. Vorüberlegungen	20
2. Hauptsatz	21
3. Folgerungen	24
3.1 Elemente, Elementezahl und Hasse-Diagramme von Teilmengen $T(a)$	24
3.2 Primzahlkriterium	28
<i>III. ggT und kgV.</i>	30
1. Definition des ggT	30
2. ggT und Primfaktorzerlegung	32
3. ggT und Euklidischer Algorithmus	33
3.1 Division mit Rest	33
3.2 Euklidischer Algorithmus	34
3.3 Menge der Vielfachen vom $\text{ggT}(a, b)$ und der Linearkombinationen von a und b	37
3.4 Euklidischer Algorithmus und lineare diophantische Gleichungen mit 2 Variablen	40
4. Verknüpfungsgebilde (\mathbb{N}, ggT)	42

5.	Definition des kgV.	44
6.	kgV und Primfaktorzerlegung	45
7.	Zusammenhang von kgV (a, b) und ggT (a, b).	46
8.	Verknüpfungsgebilde (\mathbb{N} , kgV).	48
9.	Diagramme zur ggT- und kgV-Bestimmung.	49
9.1	Euler-Diagramme.	49
9.2	Hasse-Diagramme.	52
IV.	<i>Kongruenzen/Restklassen.</i>	56
1.	Definition.	56
2.	Eigenschaften.	58
3.	Restklassen.	61
4.	Anwendungen.	68
4.1	Sätze von Euler und Fermat	68
4.2	Rechenproben.	70
4.3	Prüfziffern.	75
V.	<i>Primzahlen.</i>	76
1.	Anzahl/Verteilung.	76
2.	Primzahlformeln.	81
VI.	<i>Eulersche (D-Funktion.</i>	85
1.	Produktformel.	85
2.	Summenformel.	89
VII.	<i>Stellenwertsysteme/Teilbarkeitsregeln.</i>	92
1.	Darstellung/Umrechnung	92
2.	Rechenoperationen.	100
2.1	Addition/Subtraktion.	100
2.2	Multiplikation.	102
2.3	Division.	103
3.	Teilbarkeitsregeln.	104
3.1	Vorüberlegungen.	104
3.2	Voraussetzungen.	105
3.3	Teilbarkeitsregeln.	106
3.3.1	Endstellenregeln.	107
3.3.2	Quersummenregeln.	109

3.3.3 Alternierende Quersummenregeln110
3.4 Tabellarischer Überblick111
VIII. Systembrüche114
1. Endliche Dezimalbrüche115
2. Reinperiodische Dezimalbrüche119
3. Gemischtperiodische Dezimalbrüche127
4. Verallgemeinerungen129
IX. Vollkommene Zahlen)Fibonacci-Zahlen.136
1. Vollkommene Zahlen136
2. Fibonacci-Zahlen141
Anhang.145
Primzahltable (1-1000).145
Lösungshinweise zu den Übungen.146
Literaturverzeichnis.157
Liste der verwendeten Symbole.163
Sachregister.165