

Höhere Mathematik I

Eine Einführung

von

Dr. rer. nat. Günter Hellwig
*o. Professor an der Rheinisch-Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen*

2. Auflage (Neuausgabe in einem Band)



Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich
B. I. - Wissenschaftsverlag

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

<i>Die reellen Zahlen</i>	15
1.1 Vorbereitungen	15
1.2 Die Axiome der Gleichheit	16
1.3 Die Axiome der Addition und der Subtraktion	17
1.4 Die Axiome der Multiplikation und der Division	19
1.5 Die Anordnungsaxiome	23
1.6 Das Wohlordnungsaxiom	27
1.7 Beispiele zum Prinzip der vollständigen Induktion	33
1.8 Das Vollständigkeitsaxiom	37
1.9 Bedeutung des Vollständigkeitsaxioms	42
1.10 Der absolute Betrag einer reellen Zahl	48
1.11 Zwei einfache Ungleichungen	54
1.12 Einige Rechenoperationen für Mengen	57

KAPITEL 2

<i>Funktionen</i>	60
2.1 Begriff der Funktion	60
2.2 Der Grenzwertbegriff	66
2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	69
2.4 Rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte	79
2.5 Stetigkeit in x_0	81
2.6 Rechts- und linksseitige Stetigkeit in x_0	84
2.7 Stetigkeit in einem Intervall	85
2.8 Gleichmäßige Stetigkeit in einem Intervall	87
2.9 Sätze über in $[a, b]$ stetige Funktionen	90

KAPITEL 3

	<i>Das bestimmte Integral</i>	98
3.1	Vorbereitende Betrachtungen zum Integralbegriff	98
3.2	Definition des bestimmten Integrals	100
3.3	Sätze über Unter- und Obersummen	103
3.4	Rechenregeln für integrierbare Funktionen	109
3.5	Die Integrierbarkeit der stetigen Funktionen	115
3.6	Integrierbarkeit der stückweise stetigen Funktionen ...	120
3.7	Rechenregeln für stückweise stetige Funktionen	124
3.8	Mittelwertsätze der Integralrechnung	126

KAPITEL 4

	<i>Die Ableitung</i>	129
4.1	Vorbereitende Betrachtungen zur Ableitung	129
4.2	Definition der Ableitung	130
4.3	Rechenregeln für die Ableitung	136
4.4	Das Differential von f	138
4.5	Die abgeleitete Funktion f'	140
4.6	Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Kettenregel	141
4.7	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	145
4.8	Die Umkehrfunktion	148

KAPITEL 5

	<i>Differential- und Integralrechnung</i>	153
5.1	Stammfunktion	153
5.2	Stamm - Menge, Unbestimmtes Integral	158
5.3	Substitutionsregeln	168

KAPITEL 6

<i>Ausbau der Differential- und Integralrechnung</i>	175
6.1 Der natürliche Logarithmus	175
6.2 Die Exponentialfunktion	182
6.3 Die allgemeine Potenz	187
6.4 Die allgemeine Exponentialfunktion und der allgemeine Logarithmus	191
6.5 Die hyperbolischen Funktionen	195
6.6 Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung	200
6.7 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	209
6.8 Die trigonometrischen Funktionen	214
6.9 Die Arcus-Funktionen	229
6.10 Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (Fortsetzung von 6.7)	233
6.11 Länge ebener Kurven	255
6.12 Zwei Relationen zwischen f, f'	267
6.13 Die Funktion $f = 0$	271
Symbolverzeichnis	I
Sachverzeichnis	III

KAPITEL 7

<i>Theorie der Konvergenz</i>	285
7.1 Der Grenzwertbegriff bei Zahlenfolgen	285
7.2 Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen	289
7.3 Häufungspunkte, Teilfolgen	291
7.4 Das CAUCHYsche Konvergenzkriterium bei Zahlenfolgen	299
7.5 Das CAUCHYsche Konvergenzkriterium bei Funktionen	302
7.6 Das CAUCHYsche Konvergenzkriterium bei unendlichen Reihen	305
7.7 Rechenregeln für unendliche Reihen	308
7.8 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen	312

7.9	TAYLORSche Formel	322
7.10	TAYLORSche Reihe	328
7.11	Reihenentwicklungen für $\arctan x$ und $\log(1+x)$	337
7.12	Relative Extremwerte	346
7.13	Beweis von T_1 aus 6.8	349

KAPITEL 8

	<i>Ergänzungen zur Integralrechnung</i>	352
8.1	$\int \frac{ax+b}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx$ in I ; $\alpha \neq 0, n = 1, 2, \dots$	353
8.2	$\int \frac{x^k}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} dx$ und $\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ in I ; $\alpha \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots$	359
8.3	Integration rationaler Funktionen	365
8.4	Unbestimmte Integrale über trigonometrische Funktionen	371
8.5	Die SIMPSONSche Formel	376

KAPITEL 9

	<i>Das STIELTJES-Integral</i>	387
9.1	Vorbereitende Betrachtungen	387
9.2	Definition des STIELTJES-Integrals	388
9.3	Sätze über Unter- und Obersummen	389
9.4	Rechenregeln für nach g integrierbare Funktionen	390
9.5	Kriterien für die Existenz des STIELTJES-Integrals	392
9.6	Mittelwertsätze	395
9.7	Anwendungen in der Mechanik	396
	Anhang. Mathematische Sprechweisen und Beweistechnik	401
	Symbolverzeichnis	403
	Sachverzeichnis	405