

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1

Ein Lehr- und Arbeitsbuch
für das Grundstudium

13., durchgesehene Auflage

Mit 609 Abbildungen, zahlreichen Beispielen
aus Naturwissenschaft und Technik sowie
352 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen	1
1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	3
2 Die Menge der reellen Zahlen	6
2.1 Darstellung der reellen Zahlen und ihrer Eigenschaften	6
2.2 Anordnung der Zahlen, Ungleichung, Betrag	7
2.3 Teilmengen und Intervalle	8
3 Gleichungen	9
3.1 Lineare Gleichungen	10
3.2 Quadratische Gleichungen	10
3.3 Gleichungen 3. und höheren Grades	11
3.3.1 Allgemeine Vorbetrachtung	11
3.3.2 Kubische Gleichungen vom speziellen Typ $ax^3 + bx^2 + cx = 0$	12
3.3.3 Bi-quadratische Gleichungen	12
3.4 Wurzelgleichungen	13
3.5 Betragsgleichungen	15
3.5.1 Definition der Betragsfunktion	15
3.5.2 Analytische Lösung einer Betragsgleichung durch Fallunterscheidung (Beispiel)	18
3.5.3 Lösung einer Betragsgleichung auf halb-graphischem Wege (Beispiel)	19
4 Ungleichungen	20
5 Lineare Gleichungssysteme	23
5.1 Ein einführendes Beispiel	23
5.2 Der Gaußsche Algorithmus	26
5.3 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	35
6 Der Binomische Lehrsatz	37
Übungsaufgaben	41
Zu Abschnitt 1 und 2	41
Zu Abschnitt 3	41

Zu Abschnitt 4	42
Zu Abschnitt 5	42
Zu Abschnitt 6	44
II Vektoralgebra	45
1 Grundbegriffe	45
1.1 Definition eines Vektors	45
1.2 Gleichheit von Vektoren	46
1.3 Parallele, anti-parallele und kollineare Vektoren	47
1.4 Vektoroperationen	48
1.4.1 Addition von Vektoren	49
1.4.2 Subtraktion von Vektoren	51
1.4.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	52
2 Vektorrechnung in der Ebene	54
2.1 Komponentendarstellung eines Vektors	54
2.2 Darstellung der Vektoroperationen	58
2.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	58
2.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	59
2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	61
2.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	61
2.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	64
2.4 Linear unabhängige Vektoren	67
2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Resultierende eines ebenen Kräftesystems	69
3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum	71
3.1 Komponentendarstellung eines Vektors	72
3.2 Darstellung der Vektoroperationen	75
3.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	75
3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	77
3.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	79
3.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	79
3.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	82
3.3.3 Richtungswinkel eines Vektors	83
3.3.4 Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor	85
3.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Arbeit einer Kraft	88
3.4 Vektorprodukt zweier Vektoren	90
3.4.1 Definition und Berechnung eines Vektorproduktes	90
3.4.2 Anwendungsbeispiele	96
3.4.2.1 Drehmoment (Moment einer Kraft)	96
3.4.2.2 Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld (Lorentz-Kraft)	97
3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)	98
3.6 Linear unabhängige Vektoren	102

4 Anwendungen in der Geometrie	105
4.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden.	105
4.1.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden.	105
4.1.2 Zwei-Punkte-Form einer Geraden.	107
4.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden.	108
4.1.4 Abstand zweier paralleler Geraden.	110
4.1.5 Abstand zweier windschiefer Geraden.	112
4.1.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden.	114
4.2 Vektorielle Darstellung einer Ebene.	117
4.2.1 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene.	117
4.2.2 Drei-Punkte-Form einer Ebene.	119
4.2.3 Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Vektor.	122
4.2.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene.	123
4.2.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene.	125
4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene.	126
4.2.7 Abstand zweier paralleler Ebenen.	130
4.2.8 Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen.	132
Übungsaufgaben	135
Zu Abschnitt 2 und 3.	135
Zu Abschnitt 4.	141
III Funktionen und Kurven	146
1 Definition und Darstellung einer Funktion	146
1.1 Definition einer Funktion.	146
1.2 Darstellungsformen einer Funktion.	147
1.2.1 Analytische Darstellung.	147
1.2.2 Darstellung durch eine Wertetabelle (Funktionstafel).	148
1.2.3 Graphische Darstellung.	148
1.2.4 Parameterdarstellung einer Funktion.	149
2 Allgemeine Funktionseigenschaften	151
2.1 Nullstellen.	151
2.2 Symmetrieverhalten.	152
2.3 Monotonie.	154
2.4 Periodizität.	157
2.5 Umkehrfunktion oder inverse Funktion.	159
3 Koordinatentransformationen	163
3.1 Ein einführendes Beispiel.	163
3.2 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems.	164
3.3 Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten.	168
3.3.1 Definition der Polarkoordinaten.	168
3.3.2 Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten.	171

4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	173
4.1 Reelle Zahlenfolgen	173
4.1.1 Definition und Darstellung einer reellen Zahlenfolge	173
4.1.2 Grenzwert einer Folge	175
4.2 Grenzwert einer Funktion	177
4.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow X_0$	177
4.2.2 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$	181
4.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	183
4.2.4 Ein Anwendungsbeispiel: Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems	184
4.3 Stetigkeit einer Funktion	185
4.4 Unstetigkeiten (Lücken, Pole, Sprünge)	186
5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	190
5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion	190
5.2 Konstante und lineare Funktionen	191
5.3 Quadratische Funktionen	194
5.4 Polynomfunktionen höheren Grades	198
5.5 Horner-Schema und Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion	203
5.6 Interpolationspolynome	207
5.6.1 Allgemeine Vorbetrachtung	207
5.6.2 Interpolationspolynom von Newton	208
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Biegelinie eines Balkens	212
6 Gebrochenrationale Funktionen	212
6.1 Definition einer gebrochenrationalen Funktion	212
6.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole	213
6.3 Asymptotisches Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen	219
6.4 Ein Anwendungsbeispiel: Kapazität eines Kugelkondensators	222
7 Potenz- und Wurzelfunktionen	223
7.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	223
7.2 Wurzelfunktionen	225
7.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	228
7.4 Ein Anwendungsbeispiel: Beschleunigung eines Elektrons in einem elektrischen Feld	229
8 Kegelschnitte	230
8.1 Darstellung eines Kegelschnittes durch eine algebraische Gleichung 2. Grades mit konstanten Koeffizienten	230
8.2 Gleichungen eines Kreises	231
8.3 Gleichungen einer Ellipse	232
8.4 Gleichungen einer Hyperbel	234
8.5 Gleichungen einer Parabel	237
8.6 Beispiele zu den Kegelschnitten	239

9	Trigonometrische Funktionen	243
9.1	Grundbegriffe	243
9.2	Sinus- und Kosinusfunktion	248
9.3	Tangens- und Kotangensfunktion	249
9.4	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	250
9.5	Anwendungen in der Schwingungslehre	252
9.5.1	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	252
9.5.1.1	Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	252
9.5.1.2	Harmonische Schwingung eines Federpendels (Feder-Masse-Schwinger)	257
9.5.2	Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm	258
9.5.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen	265
9.5.4	Lissajous-Figuren	270
10	Arkusfunktionen	271
10.1	Das Problem der Umkehrung trigonometrischer Funktionen	271
10.2	Arkussinusfunktion	272
10.3	Arkuskosinusfunktion	274
10.4	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	275
10.5	Trigonometrische Gleichungen	278
11	Exponentialfunktionen	280
11.1	Grundbegriffe	280
11.2	Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion	280
11.3	Spezielle, in den Anwendungen häufig auftretende Funktionstypen mit e-Funktionen	282
11.3.1	Abklingfunktionen	282
11.3.2	Sättigungsfunktionen	285
11.3.3	Wachstumsfunktionen	288
11.3.4	Gedämpfte Schwingungen	289
11.3.5	Gauß-Funktionen	291
12	Logarithmusfunktionen	292
12.1	Grundbegriffe	292
12.2	Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion	295
12.3	Exponential- und Logarithmusgleichungen	298
13	Hyperbel- und Areafunktionen	300
13.1	Hyperbelfunktionen	300
13.1.1	Definition der Hyperbelfunktionen	300
13.1.2	Die Hyperbelfunktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$	301
13.1.3	Die Hyperbelfunktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$	303
13.1.4	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	304
13.2	Areafunktionen	305
13.2.1	Definition der Areafunktionen	305
13.2.2	Die Areafunktionen $y = \operatorname{arsinh} x$ und $v = \operatorname{arcosh} x$	305

13.2.3 Die Areafunktionen $y = \operatorname{artanh}x$ und $y = \operatorname{arcoth}x$	306
13.2.4 Darstellung der Areafunktionen durch Logarithmusfunktionen . . .	307
13.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes.	308
Übungsaufgaben	309
Zu Abschnitt 1.	309
Zu Abschnitt 2.	310
Zu Abschnitt 3.	311
Zu Abschnitt 4.	312
Zu Abschnitt 5.	313
Zu Abschnitt 6.	316
Zu Abschnitt 7.	316
Zu Abschnitt 8.	317
Zu Abschnitt 9 und 10.	317
Zu Abschnitt 11, 12 und 13.	320
IV Differentialrechnung	323
1 Differenzierbarkeit einer Funktion	323
1.1 Das Tangentenproblem.	323
1.2 Ableitung einer Funktion.	324
1.3 Ableitung der elementaren Funktionen	328
2 Ableitungsregeln	331
2.1 Faktorregel.	331
2.2 Summenregel.	332
2.3 Produktregel.	333
2.4 Quotientenregel.	335
2.5 Kettenregel.	337
2.6 Kombinationen mehrerer Ableitungsregeln.	343
2.7 Logarithmische Ableitung	344
2.8 Ableitung der Umkehrfunktion.	346
2.9 Implizite Differentiation	347
2.10 Differential einer Funktion	350
2.11 Höhere Ableitungen	352
2.12 Ableitung einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	354
2.13 Anstieg einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve.	357
2.14 Einfache Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	361
2.14.1 Bewegung eines Massenpunktes (Geschwindigkeit, Beschleunigung).	361
2.14.2 Induktionsgesetz.	364
2.14.3 Elektrischer Schwingkreis.	365

3 Anwendungen der Differentialrechnung	366
3.1 Tangente und Normale	366
3.2 Linearisierung einer Funktion	368
3.3 Monotonie und Krümmung einer Kurve	371
3.3.1 Geometrische Vorbetrachtungen	371
3.3.2 Monotonie	372
3.3.3 Krümmung einer ebenen Kurve	374
3.4 Charakteristische Kurvenpunkte	382
3.4.1 Relative oder lokale Extremwerte	382
3.4.2 Wendepunkte, Sattelpunkte	388
3.4.3 Ergänzungen	392
3.5 Extremwertaufgaben	394
3.6 Kurvendiskussion	400
3.7 Näherungsweise Lösung einer Gleichung nach dem Tangentenverfahren von Newton	406
3.7.1 Iterationsverfahren	406
3.7.2 Tangentenverfahren von Newton	407
Übungsaufgaben	414
Zu Abschnitt 1	414
Zu Abschnitt 2	414
Zu Abschnitt 3	418
V Integralrechnung	422
1 Integration als Umkehrung der Differentiation	422
2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt	426
2.1 Ein einführendes Beispiel	426
2.2 Das bestimmte Integral	429
3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion	436
4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	440
5 Grund- oder Stammintegrale	444
6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion	446
7 Elementare Integrationsregeln	450
8 Integrationsmethoden	453
8.1 Integration durch Substitution	453
8.1.1 Ein einführendes Beispiel	453
8.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen	454

8.2	Partielle Integration oder Produktintegration	462
8.3	Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	468
8.3.1	Partialbruchzerlegung	469
8.3.2	Integration der Partialbrüche	471
8.4	Numerische Integrationsmethoden	475
8.4.1	Trapezformel	476
8.4.2	Simpsonsche Formel	481
9	Uneigentliche Integrale	487
9.1	Unendliches Integrationsintervall	488
9.2	Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)	492
10	Anwendungen der Integralrechnung	495
10.1	Einfache Beispiele aus Physik und Technik	495
10.1.1	Integration der Bewegungsgleichung	495
10.1.2	Biegelinie (elastische Linie) eines einseitig eingespannten Balkens	498
10.1.3	Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes	500
10.2	Flächeninhalt	501
10.2.1	Bestimmtes Integral und Flächeninhalt (Ergänzungen)	501
10.2.2	Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	506
10.3	Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	512
10.4	Bogenlänge einer ebenen Kurve	518
10.5	Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	521
10.6	Arbeits- und Energiegrößen	525
10.7	Lineare und quadratische Mittelwerte	531
10.8	Schwerpunkt homogener Flächen und Körper	536
10.8.1	Grundbegriffe	536
10.8.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	538
10.8.3	Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	544
10.9	Massenträgheitsmomente	549
10.9.1	Grundbegriffe und einfache Beispiele	549
10.9.2	Satz von Steiner	552
10.9.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers	554
	Übungsaufgaben	559
	Zu Abschnitt 1 bis 7	559
	Zu Abschnitt 8	562
	Zu Abschnitt 9	564
	Zu Abschnitt 10	565

VI Potenzreihenentwicklungen	570
1 Unendliche Reihen	570
1.1 Ein einführendes Beispiel	570
1.2 Grundbegriffe	572
1.2.1 Definition einer unendlichen Reihe	572
1.2.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	573
1.2.3 Über den Umgang mit unendlichen Reihen	577
1.3 Konvergenzkriterien	578
1.3.1 Quotientenkriterium	579
1.3.2 Wurzelkriterium	583
1.3.3 Vergleichskriterien	583
1.3.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	586
1.4 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen	588
2 Potenzreihen	590
2.1 Definition einer Potenzreihe	590
2.2 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe	591
2.3 Eigenschaften der Potenzreihen	596
3 Taylor-Reihen	597
3.1 Ein einführendes Beispiel	598
3.2 Potenzreihenentwicklung einer Funktion	599
3.2.1 Mac Laurinsche Reihe	599
3.2.2 Taylorsche Reihe	607
3.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen	608
3.3 Anwendungen der Potenzreihenentwicklungen	610
3.3.1 Näherungspolynome einer Funktion	610
3.3.2 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	621
3.3.3 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	624
3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	630
Übungsaufgaben	633
Zu Abschnitt 1	633
Zu Abschnitt 2	635
Zu Abschnitt 3	635
VII Komplexe Zahlen und Funktionen	640
1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl	640
1.1 Definition einer komplexen Zahl	640
1.2 Komplexe oder Gaußsche Zahlenebene	643
1.3 Weitere Grundbegriffe	646

1.4	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	649
1.4.1	Algebraische oder kartesische Form	649
1.4.2	Trigonometrische Form	649
1.4.3	Exponentialform	652
1.4.4	Zusammenstellung der verschiedenen Darstellungsformen	654
1.4.5	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	655
2	Komplexe Rechnung	661
2.1	Grundrechenarten für komplexe Zahlen	661
2.1.1	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	661
2.1.2	Multiplikation und Division komplexer Zahlen	663
2.1.3	Grundgesetze für komplexe Zahlen (Zusammenfassung)	672
2.2	Potenzieren	673
2.3	Radizieren (Wurzelziehen)	675
2.4	Natürlicher Logarithmus	681
3	Anwendungen der komplexen Rechnung	683
3.1	Symbolische Darstellung harmonischer Schwingungen im Zeigerdiagramm	683
3.1.1	Darstellung einer Schwingung durch einen rotierenden Zeiger	683
3.1.2	Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen	687
3.1.3	Ein Anwendungsbeispiel: Überlagerung gleichfrequenter Wechselspannungen	690
3.2	Symbolische Berechnung eines Wechselstromkreises	691
3.2.1	Das Ohmsche Gesetz der Wechselstromtechnik	691
3.2.2	Komplexe Wechselstromwiderstände und Leitwerte	693
3.2.3	Ein Anwendungsbeispiel: Der Wechselstromkreis in Reihenschaltung	698
4	Ortskurven	701
4.1	Ein einführendes Beispiel	701
4.2	Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Größe	702
4.3	Anwendungsbeispiele: Einfache Netzwerkfunktionen	705
4.3.1	Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einer Induktivität (Widerstands Ortskurve)	705
4.3.2	Parallelschaltung aus einem ohmschen Widerstand und einer Kapazität (Leitwert Ortskurve)	706
4.4	Inversion einer Ortskurve	707
4.4.1	Inversion einer komplexen Größe (Zahl)	707
4.4.2	Inversionsregeln	709
4.4.3	Ein Anwendungsbeispiel: Inversion einer Widerstands Ortskurve	711
	Übungsaufgaben	714
	Zu Abschnitt 1	714
	Zu Abschnitt 2	715
	Zu Abschnitt 3	717
	Zu Abschnitt 4	719

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	721
I Allgemeine Grundlagen	721
Abschnitt 1 und 2	721
Abschnitt 3	721
Abschnitt 4	723
Abschnitt 5	726
Abschnitt 6	727
II Vektoralgebra	728
Abschnitt 2 und 3	728
Abschnitt 4	732
III Funktionen und Kurven	740
Abschnitt 1	740
Abschnitt 2	742
Abschnitt 3	742
Abschnitt 4	743
Abschnitt 5	745
Abschnitt 6	747
Abschnitt 7	749
Abschnitt 8	749
Abschnitt 9 und 10	750
Abschnitt 11, 12 und 13	753
IV Differentialrechnung	755
Abschnitt 1	755
Abschnitt 2	755
Abschnitt 3	763
V Integralrechnung	774
Abschnitt 1 bis 7	774
Abschnitt 8	776
Abschnitt 9	779
Abschnitt 10	780
VI Potenzreihenentwicklungen	784
Abschnitt 1	784
Abschnitt 2	788
Abschnitt 3	789

VII Komplexe Zahlen und Funktionen797
Abschnitt 1.797
Abschnitt 2.800
Abschnitt 3.804
Abschnitt 4.806
Literaturhinweise808
Sachwortverzeichnis809