

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

Ein Lehr- und Arbeitsbuch
für das Grundstudium

13., durchgesehene Auflage

Mit 345 Abbildungen, zahlreichen Beispielen
aus Naturwissenschaft und Technik sowie
324 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Inhaltsverzeichnis

I Lineare Algebra	1
1 Vektoren	1
2 Reelle Matrizen	5
2.1 Ein einführendes Beispiel	5
2.2 Definition einer reellen Matrix	6
2.3 Transponierte einer Matrix	10
2.4 Spezielle quadratische Matrizen	11
2.4.1 Diagonalmatrix	11
2.4.2 Einheitsmatrix	12
2.4.3 Dreiecksmatrix	12
2.4.4 Symmetrische Matrix	13
2.4.5 Schiefsymmetrische Matrix	14
2.5 Gleichheit von Matrizen	15
2.6 Rechenoperationen für Matrizen	15
2.6.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	16
2.6.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	17
2.6.3 Multiplikation von Matrizen	18
3 Determinanten	23
3.1 Ein einführendes Beispiel	23
3.2 Zweireihige Determinanten	25
3.2.1 Definition einer zweireihigen Determinante	25
3.2.2 Eigenschaften zweireihiger Determinanten	26
3.3 Dreireihige Determinanten	33
3.3.1 Definition einer dreireihigen Determinante	33
3.3.2 Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach Unterdeterminanten (Laplacescher Entwicklungssatz)	37
3.4 Determinanten höherer Ordnung	41
3.4.1 Definition einer n -reihigen Determinante	41
3.4.2 Laplacescher Entwicklungssatz	45
3.4.3 Rechenregeln für n -reihige Determinanten	47
3.4.4 Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	50
4 Ergänzungen	54
4.1 Reguläre Matrix	54
4.2 Inverse Matrix	55
4.3 Orthogonale Matrix	58
4.4 Rang einer Matrix	63

5 Lineare Gleichungssysteme	69
5.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	69
5.2 Gaußscher Algorithmus	72
5.3 Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	76
5.4 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	83
5.4.1 Inhomogenes lineares (n, n) -System	83
5.4.2 Homogenes lineares (n, n) -System	87
5.4.3 Cramersche Regel	90
5.5 Berechnung einer inversen Matrix nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	93
5.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	95
5.6.1 Ein einführendes Beispiel	95
5.6.2 Linear unabhängige bzw. linear abhängige Vektoren	97
5.6.3 Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren	99
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	104
 6 Komplexe Matrizen	 105
6.1 Ein einführendes Beispiel	106
6.2 Definition einer komplexen Matrix	107
6.3 Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	108
6.4 Konjugiert komplexe Matrix, konjugiert transponierte Matrix	110
6.5 Spezielle komplexe Matrizen	113
6.5.1 Hermitesche Matrix	113
6.5.2 Schiefhermitesche Matrix	116
6.5.3 Unitäre Matrix	118
 7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	 120
7.1 Ein einführendes Beispiel	120
7.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix	125
7.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer \leftarrow -reihigen Matrix	132
7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen	138
7.4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix	138
7.4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	140
7.4.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix	142
7.5 Ein Anwendungsbeispiel: Normalschwingungen gekoppelter mechanischer Systeme	144
 Übungsaufgaben	 146
Zu Abschnitt 1	146
Zu Abschnitt 2	147
Zu Abschnitt 3	148
Zu Abschnitt 4	151
Zu Abschnitt 5	154
Zu Abschnitt 6	158
Zu Abschnitt 7	160

II Fourier-Reihen	163
1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	163
1.1 Einleitung	163
1.2 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe	165
1.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe	174
1.4 Übergang von der komplexen zur reellen Darstellungsform	178
2 Anwendungen	182
2.1 Fourier-Zerlegung einer Schwingung (harmonische Analyse)	182
2.2 Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen (Tabelle)	186
2.3 Ein Anwendungsbeispiel: Fourier-Zerlegung einer Kippspannung	187
Übungsaufgaben	190
Zu Abschnitt 1	190
Zu Abschnitt 2	192
III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	194
1 Funktionen von mehreren Variablen	194
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	194
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	197
1.2.1 Analytische Darstellung	197
1.2.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel)	198
1.2.3 Graphische Darstellung	200
1.2.3.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	200
1.2.3.2 Schnittpunktendiagramme	204
1.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	209
2 Partielle Differentiation	213
2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung	213
2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	222
2.3 Differentiation nach einem Parameter (verallgemeinerte Kettenregel)	227
2.4 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion	232
2.4.1 Geometrische Betrachtungen	232
2.4.2 Definition des totalen oder vollständigen Differentials	234
2.5 Anwendungen	238
2.5.1 Implizite Differentiation	238
2.5.2 Linearisierung einer Funktion	242
2.5.3 Relative oder lokale Extremwerte	245
2.5.4 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	252
2.5.5 Lineare Fehlerfortpflanzung	259

3 Mehrfachintegrale	266
3.1 Doppelintegrale	266
3.1.1 Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals	266
3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals	269
3.1.2.1 Doppelintegral in kartesischen Koordinaten	269
3.1.2.2 Doppelintegral in Polarkoordinaten	277
3.1.3 Anwendungen	282
3.1.3.1 Flächeninhalt	283
3.1.3.2 Schwerpunkt einer homogenen Fläche	289
3.1.3.3 Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)	295
3.2 Dreifachintegrale	301
3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals	301
3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals	303
3.2.2.1 Dreifachintegral in kartesischen Koordinaten	303
3.2.2.2 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten	307
3.2.3 Anwendungen	312
3.2.3.1 Volumen und Masse eines Körpers	312
3.2.3.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers	320
3.2.3.3 Massenträgheitsmomente	326
Übungsaufgaben	332
Zu Abschnitt 1	332
Zu Abschnitt 2	332
Zu Abschnitt 3	338
IV Gewöhnliche Differentialgleichungen	343
1 Grundbegriffe	343
1.1 Ein einführendes Beispiel	343
1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung	345
1.3 Lösungen einer Differentialgleichung	345
1.4 Modellmäßige Beschreibung naturwissenschaftlich-technischer Problemstellungen durch Differentialgleichungen	348
1.5 Anfangswert- und Randwertprobleme	351
2 Differentialgleichungen 1. Ordnung	355
2.1 Geometrische Betrachtungen	355
2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen	358
2.3 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution	362
2.4 Exakte Differentialgleichungen	365
2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	370
2.5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	370
2.5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	371
2.5.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	373
2.5.3.1 Variation der Konstanten	373
2.5.3.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung	377

2.6	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ...	380
2.7	Anwendungsbeispiele	384
2.7.1	Radioaktiver Zerfall	384
2.7.2	Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	385
2.7.3	Wechselstromkreis	388
3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	392
3.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	392
3.2	Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung ..	393
3.3	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	400
3.4	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	407
4	Anwendungen in der Schwingungslehre	417
4.1	Mechanische Schwingungen	417
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	417
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	420
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	424
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	424
4.1.3.2	Starke Dämpfung (aperiodisches Verhalten, Kriechfall) ..	427
4.1.3.3	Aperiodischer Grenzfall	431
4.1.3.4	Zusammenfassung	434
4.1.4	Erzwungene Schwingung	435
4.2	Elektrische Schwingungen	445
4.2.1	Schwingungsgleichung eines elektrischen Reihenschwingkreises	445
4.2.2	Freie elektrische Schwingung	448
4.2.3	Erzwungene elektrische Schwingung	451
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	455
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung «-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	455
5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	456
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	463
5.4	Ein Eigenwertproblem: Bestimmung der Eulerschen Knicklast	468
6	Numerische Integration einer Differentialgleichung	472
6.1	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	473
6.1.1	Streckenzugverfahren von Euler	473
6.1.2	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	477
6.2	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	483
7	Systeme linearer Differentialgleichungen	487
7.1	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	487
7.1.1	Ein einführendes Beispiel	487
7.1.2	Grundbegriffe	488

7.1.3	Integration des homogenen linearen Differentialgleichungssystems ...	491
7.1.4	Integration des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems ..	496
7.1.4.1	Aufsuchen einer partikulären Lösung	496
7.1.4.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	500
7.1.5	Ein Anwendungsbeispiel: Kettenleiter	509
7.2	Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	513
Übungsaufgaben	519
Zu Abschnitt 1.	519
Zu Abschnitt 2.	520
Zu Abschnitt 3.	526
Zu Abschnitt 4.	528
Zu Abschnitt 5.	532
Zu Abschnitt 6.	535
Zu Abschnitt 7.	536
V	Fourier-Transformationen	539
1	Grundbegriffe	539
1.1	Einleitung	539
1.2	Definition der Fourier-Transformierten einer Funktion	544
1.3	Inverse Fourier-Transformation	549
1.4	Äquivalente Fourier-Darstellung in reeller Form	551
2	Spezielle Fourier-Transformationen	552
2.1	Fourier-Kosinus-Transformation	552
2.2	Fourier-Sinus-Transformation	554
2.3	Zusammenhang zwischen den Fourier-Transformationen $F(w)$, $F_c(w)$ und $F_s(\omega)$	556
3	Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen	558
3.1	Sprungfunktionen	558
3.2	Rechteckige Impulse	561
3.3	Diracsche Deltafunktion (Impulsfunktion)	562
3.4	Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion und der Diracschen Deltafunktion	567
4	Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)	570
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	570
4.2	Ähnlichkeitssatz	572
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)	573
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)	576

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	578
4.5.1	Ableitungssatz für die Originalfunktion	578
4.5.2	Ableitungssatz für die Bildfunktion	579
4.6	Integrationssatz für die Originalfunktion	582
4.7	Faltungssatz	583
4.8	Vertauschungssatz	587
4.9	Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationssätze)	590
4.10	Fourier-Transformation periodischer Funktionen (Sinus, Kosinus)	591
5	Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	592
5.1	Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	592
5.2	Tabellen spezieller Fourier-Transformationen	595
	Tabelle 1: Exponentielle Fourier-Transformationen	595
	Tabelle 2: Fourier-Sinus-Transformationen	597
	Tabelle 3: Fourier-Kosinus-Transformationen	598
6	Anwendungen der Fourier-Transformation	599
6.1	Integration einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	599
6.2	Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik	601
6.2.1	Fourier-Analyse einer gedämpften Schwingung	601
6.2.2	Frequenzgang eines Übertragungssystems	603
	Übungsaufgaben	607
	Zu Abschnitt 1.	607
	Zu Abschnitt 2.	608
	Zu Abschnitt 3.	609
	Zu Abschnitt 4.	611
	Zu Abschnitt 5.	615
	Zu Abschnitt 6.	616
VI	Laplace-Transformationen	617
1	Grundbegriffe	617
1.1	Ein einführendes Beispiel	617
1.2	Definition der Laplace-Transformierten einer Funktion	620
1.3	Inverse Laplace-Transformation	625
2	Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)	626
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	627
2.2	Ähnlichkeitssatz	628
2.3	Verschiebungssätze	629
2.3.1	Erster Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts)	629
2.3.2	Zweiter Verschiebungssatz (Verschiebung nach links)	632
2.4	Dämpfungssatz	634

2.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	635
2.5.1	Ableitungssatz für die Originalfunktion	635
2.5.2	Ableitungssatz für die Bildfunktion	637
2.6	Integrierungssätze	639
2.6.1	Integrierungssatz für die Originalfunktion	639
2.6.2	Integrierungssatz für die Bildfunktion	641
2.7	Faltungssatz	642
2.8	Grenzwertsätze	645
2.9	Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationsätze)	649
3	Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	650
4	Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich	654
4.1	Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation	654
4.2	Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	657
5	Anwendungen der Laplace-Transformation	660
5.1	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	660
5.1.1	Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation	660
5.1.2	Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	661
5.1.3	Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	663
5.2	Einfache Beispiele aus Physik und Technik	666
5.2.1	Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand	666
5.2.2	Zeitverhalten eines $PT\backslash$ -Regelkreisgliedes	668
5.2.3	Harmonische Schwingung einer Blattfeder in einem beschleunigten System	669
5.2.4	Elektrischer Reihenschwingkreis	671
5.2.5	Gekoppelte mechanische Schwingungen	674
	Übungsaufgaben	676
	Zu Abschnitt 1.	676
	Zu Abschnitt 2.	677
	Zu Abschnitt 3.	680
	Zu Abschnitt 4.	681
	Zu Abschnitt 5.	682

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben 685

I Lineare Algebra 685

 Abschnitt 1. 685

 Abschnitt 2. 685

 Abschnitt 3. 687

 Abschnitt 4. 689

 Abschnitt 5. 692

 Abschnitt 6. 697

 Abschnitt 7. 700

II Fourier-Reihen 706

 Abschnitt 1. 706

 Abschnitt 2. 707

III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen 709

 Abschnitt 1. 709

 Abschnitt 2. 710

 Abschnitt 3. 717

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen 725

 Abschnitt 1. 725

 Abschnitt 2. 725

 Abschnitt 3. 732

 Abschnitt 4. 736

 Abschnitt 5. 741

 Abschnitt 6. 744

 Abschnitt 7. 746

V Fourier-Transformationen 752

 Abschnitt 1. 752

 Abschnitt 2. 753

 Abschnitt 3. 755

 Abschnitt 4. 759

 Abschnitt 5. 763

 Abschnitt 6. 764

VI Laplace-Transformationen 766

 Abschnitt 1. 766

 Abschnitt 2. 767

 Abschnitt 3. 771

 Abschnitt 4. 772

 Abschnitt 5. 772

Literaturhinweise 781

Sachwortverzeichnis 782