

Egon Pracht/Karl Heidenreich

Elementare Zahlentheorie

Mit 15 Abbildungen

Ferdinand Schöningh • Paderborn

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
1. Teiler und Vielfaches (Ideale)	9
1.1. Teiler.	9
1.2. Vielfache und Ideale.	14
Aufgaben.	17
2. Zerlegung in Primfaktoren	18
2.1. Teilmengen und Primzahl.	18
2.2. Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie.	19
2.3. Erste Anwendung des Hauptsatzes.	22
Aufgaben.	28
3. Vollkommene Zahlen	29
3.1. Definitionen und Hilfssätze.	29
3.2. Die Sätze von Euklid und Euler.	31
3.3. Mersennesche Primzahlen.	33
3.4. Fermatsche Primzahlen.	34
Aufgaben.	36
4. Größter gemeinsamer Teiler und euklidischer Algorithmus, kleinstes gemeinsames Vielfaches	37
4.1. Größter gemeinsamer Teiler.	37
4.2. Euklidischer Algorithmus.	42
4.3. Kleinstes gemeinsames Vielfaches.	44
Aufgaben.	48
5. Die Struktur von (N, ggT), (N, kgV) und $(M, \text{kg}, \text{ggT})$	49
5.1. Die Struktur von (N, ggT)	49
5.2. Die Struktur von (N, kgV)	51
5.3. Die Struktur von $(N, \text{kgV}, \text{ggT})$	52
Aufgaben.	55
6. Kongruenzen und Restklassen	56
6.1. Definitionen und elementare Eigenschaften.	56
6.2. Die Division im Restklassenring.	60
Aufgaben.	67
7. Anwendungen der Kongruenzenrechnung	68
7.1. Beantwortung einiger numerischer Fragen.	68
7.2. Der kleine Fermatsche Satz.	69
7.3. Simultane Kongruenzen und die Produktformel für die Eulersche Funktion.	74

Inhaltsverzeichnis

7.4. Bemerkungen zur Struktur der Restklassenringe und primen Restgruppen.	78
Aufgaben.	84
8. Primzahlen.	85
8.1. Euklidischer und Eulerscher Beweis für die Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen.	85
8.2. Primzahlen und natürliche Zahlen.	87
Aufgaben.	94
9. „Primzahlen“ und Zerlegbarkeit in einigen von $[N, +, \cdot]$ verschiedenen Rechenbereichen.	96
9.1. Primelemente und Zerlegbarkeit in $(W \setminus \{a\}, +, \cdot)$	96
9.2. Primzahl und Zerlegbarkeit in $(Z, +, \cdot)$	100
9.3. Primzahl und Zerlegbarkeit in $(\mathbb{Z}/\langle 2 \rangle, +, \cdot)$ und $(Z_n/\langle \delta \rangle, +, \cdot)$	104
Aufgaben.	112
10. Darstellung natürlicher Zahlen.	113
10.1. Dezimalsystem.	113
10.2. Stellenwertsysteme mit natürlicher Basis.	115
Aufgaben.	123
11. Arithmetische Anwendungen.	125
11.1. Rechenverfahren.	125
11.2. Teilbarkeitsregeln und Restproben.	133
Aufgaben.	143
12. Darstellung rationaler und reeller Zahlen.	145
12.1. Darstellung rationaler Zahlen in einem g-adischen Stellenwertsystem.	150
12.2. Periodische g-adische Brüche.	150
12.3. Darstellung reeller Zahlen.	158
12.4. Verallgemeinerte Stellenwertsysteme.	161
Aufgaben.	168
Lösungen und Lösungshinweise zu den Aufgaben.	169
Literaturhinweise.	181
Alphabetisches Register.	183
Verzeichnis der Symbole.	187