

Henri L. Le Roy

Prinzipien der linearen Algebra

Eine anwendungsorientierte
Einführung für Naturwissenschaftler
und Nichtmathematiker

Verlag Paul Haupt Bern und Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

I.	Grundlagen der Matrizenrechnung	19
	I.1. Definition der Matrix	19
	I.2. Die transponierte (gestürzte) Matrix	22
	I.3. Gleichheit bzw. Ungleichheit von Matrizen	23
	I.4. Wo kommen Matrizen und Vektoren vor?	25
	I.5. Rechenregeln: Addition, Subtraktion und Multiplikation	26
	I.6. Weitere Regeln: Die direkte Addition und die direkte Multiplikation	33
	Aufgaben	37
II.	Determinanten: Definition und Rechenregeln ...	39
	II.1. Allgemeines	39
	II.2. Definition und Berechnung der Deter- minante	42
	II.3. Die wichtigsten Rechenregeln	46
	Aufgaben	56
III.	Kehrmatrix (inverse Matrix)	59
	III.1. Definition und Berechnung der Kehr- matrix	59
	III.2. Eigenschaften der Kehrmatrix	64
	Aufgaben	66
IV.	Elementare Operationen, Aequivalenz von Matrizen, Rang einer Matrix	69
	IV.1. Elementare Operationen – Aequivalente Matrizen	69
	IV.2. Der Rang einer Matrix	78
	Aufgaben	80

V.	Vektoralgebra	83
	V.1. Der Vektorbegriff in allgemeiner Formulierung	83
	V.11. Vektordefinition	83
	V.12. Parallelverschiebung oder Translation	84
	V.13. Summe von Vektoren	84
	V.14. Differenz von zwei Vektoren	86
	V.15. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (Skalar)	86
	V.16. Lineare Abhängigkeit von Vektoren	87
	V.17. Das gewöhnliche rechtwinklige Koordinatensystem (Basisvektoren)	89
	V.18. Das skalare (innere) Produkt zweier Vektoren (Punkt-Produkt)	91
	V.2. Vektorielle Interpretation eines Gleichungssystems	92
	V.21. Zwei Gleichungen mit 2 unbekanntem x -Werten	92
	V.22. r Gleichungen mit $n > r$ unbekanntem x -Werten	94
	Aufgaben	98
VI.	Das Lösen und Beurteilen von linearen Gleichungssystemen (GS)	101
	VI.1. Allgemeine Darstellung und allgemeine Hinweise	101
	VI.2. Lösen eines GS vom Typ $\text{Det}(\mathbf{A}) \neq 0$ (reguläres GS): Cramer'sche Regel	104
	VI.3. Lösen eines GS vom Typ $\text{Det}(\mathbf{A}) = 0$ (singuläres GS)	109
	VI.31. Homogene Systeme (allgemeiner Teil)	109
	VI.32. Inhomogene Systeme (allgemeiner Teil)	113
	VI.4. Praktisches Vorgehen bei der Lösung von Gleichungssystemen	116
	VI.41. Homogene Systeme	116
	VI.42. Inhomogene Systeme	118

VI.43.	„Reduktion“ eines Gleichungssystems von n auf $n-b$ unbekannte x -Werte	121
VI.44.	Lineare Unabhängigkeit von Zeilen bzw. Spalten in einer Matrix bzw. das Auffinden von entsprechenden linearen Abhängigkeiten	124
	Aufgaben	127
VII.	Eindeutig schätzbare Linearkombination der x-Werte in inhomogenen, singulären Gleichungssystemen	133
VII.1.	Allgemeines	133
VII.2.	Anwendung	137
	VII.21. Beispiel aus der Statistik: Umschreibung der Problemstellung	137
	VII.22. Lösungswege	138
	Aufgaben	144
VIII.	Potenzieren einer quadratischen Matrix: A^n ...	145
VIII.1.	Charakterisierung der Problemstellung und die Berechnung von A^n	145
VIII.2.	Weitere Anwendungsbeispiele: Altersstruktur in Populationen	150
	Aufgaben	158
IX.	Die lineare Transformation	161
IX.1.	Allgemeine Bemerkungen	161
IX.2.	Die orthogonale Transformation (Achsenrotation)	162
IX.3.	Die möglichen Transformationen (orthogonale Rotation)	165
	IX.31. Die Achsenrotation (Achsen- transformation)	165
	IX.32. Die Punkttransformation	165
	IX.33. Echte und unechte Rotation	167

IX.4.	Allgemeine Punkttransformation	169
IX.41.	Transformation durch Translation	170
IX.42.	Transformation mit A , wobei $\text{Det}(A) \neq 0$	171
IX.42.1.	Spiegelung	171
IX.42.2.	Achsenpermutation ...	171
IX.42.3.	Zentrale Erweiterung ..	173
IX.42.4.	Dehnen oder Stauchen .	173
IX.42.5.	Punktrotation	174
IX.42.6.	Scherung	176
IX.42.7.	A beliebig	176
IX.43.	Transformation mit A , wobei $\text{Det}(A) = 0$	177
IX.5.	Geometrische Interpretation der Determinante	178
	Aufgaben	184
X.	Vektor: Differential-Operator	187
X.1.	Regeln (Theorie)	187
X.2.	Anwendung der Regeln in der Statistik: zwei Beispiele	190
X.3.	Das Aufsuchen von Extremwerten unter Nebenbedingungen (Lagrange)	195
X.31.	Lösung ohne Anwendung der Matrizenrechnung	196
X.32.	Anwendung der Matrizenrechnung	197
	Aufgaben	197
XI.	Quadratische Formen	199
XI.1.	Lineare Form	199
XI.2.	Bilineare Form	199
XI.3.	Quadratische Form	200
XI.31.	Allgemein	200
XI.32.	Beispiel aus der Statistik	201
XI.33.	Typen der quadratischen Formen	204
XI.4.	Diagonalisierung einer quadratischen Form	206

	XI.41. Allgemeines	206
	XI.42. Ergänzung zur Ellipse als quadratische Form	207
	XI.43. Der Gradient	208
	XI.44. Ellipsenachse und entsprechender Gradient	209
	XI.45. Die Diagonalform der quadratischen Form	212
	XI.46. Allgemeines zum Diagonalisieren von quadratischen Matrizen	215
	XI.47. Erweiterung zur Kurve 2. Ordnung	216
	XI.48. Beispiel aus der zweidimensionalen Normalverteilung	221
	Aufgaben	229
XII.	Besondere Matrizen	233
	XII.1. Die orthogonale Matrix A	233
	XII.11. Transformation	233
	XII.12. Die Eigenwerte	235
	XII.2. Die idempotente Matrix $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$	236
	XII.3. Die Matrix $\mathbf{J}_{r,c}$	238
	XII.4. Die lineare Matrixfunktion $\mathbf{V}_r = a\mathbf{I}_r + b\mathbf{J}_r = \mathbf{V}_r(a,b)$	239
	XII.5. Matrizen, die elementare Operationen erfassen	240
	XII.6. Diagonalmatrix D und modifizierte Diagonalmatrix \mathbf{D}_M	243
	XII.7. Komplexe Matrizen	244
	Aufgaben	246
XIII.	Eigenwerte (charakteristische oder latente Wurzeln) und Eigenvektoren (charakteristische oder latente Vektoren) einer Matrix	249
	XIII.1. Allgemeine Hinweise	249
	XIII.11. Ansatz	249
	XIII.12. Beispiele	249
	XIII.13. Geometrische Interpretation ..	250
	XIII.14. Allgemeine Darstellung der	

	Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	251
XIII.2.	Die Eigenwerte einer Matrix $A_{n,n}$	252
	XIII.21. $n = 2$ bzw. $A_{n,n} = A_{2,2}$	252
	XIII.22. $n = 3$ bzw. $A_{n,n} = A_{3,3}$	253
XIII.3.	Eigenschaften der Eigenwerte	254
XIII.4.	Cayley-Hamilton-Theorem (Matrizen- polynome)	256
XIII.5.	Eigenwerte besonderer Matrizen	259
	XIII.51. Die Eigenwerte orthogonaler Matrizen	259
	XIII.52. Die Eigenwerte einer idempoten Matrix	259
	XIII.53. Die Eigenwerte der Matrix $A = V_N(a,b) = aI_N + bJ_N$	261
XIII.6.	Aufsuchen des dominanten Eigenwertes	261
	Aufgaben	265
XIV.	Matrizengleichungen	267
	XIV.1. Die unbekannte Matrix X ist in der Matrizengleichung nur mit skalaren Faktoren verbunden	267
	XIV.2. Die unbekannte Matrix ist in der Matrizengleichung entweder als Rechts- oder nur als Linksfaktor mit gegebenen Matrizen verknüpft	267
	XIV.3. Die Matrix X ist mit Vektoren verknüpft	267
	XIV.4. Komplizierterer Fall (Vektorenfunk- tionen aus der Statistik)	267
	XIV.5. Unterteilte Matrizen und Vektoren	268
	Aufgaben	274
XV.	System von Differentialgleichungen: Anwendung der Matrizenrechnung	277
	XV.1. Eine einzige, gewöhnliche Differential- gleichung (DG)	277
	XV.11. Allgemeine Hinweise	277
	XV.12. Beispiele	278

XV.2.	Systeme gewöhnlicher DG 1. Ordnung .	278
	XV.21. Allgemeines	278
	XV.22. System von gewöhnlichen ho- mogenen DG (Typ I)	279
	XV.23. System von gewöhnlichen inho- mogenen DG 1. Ordnung mit $g_i(x) = \alpha_i e^x$ und alle λ_i verschie- den (Typ II)	282
	Aufgaben	288
XVI.	Lösungen zu den Aufgaben (Kapitel I bis Kapitel XV)	289
XVII.	Literatur	321
XVIII.	Sachregister	323