
Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Vektoranalysis,
Wahrscheinlichkeitsrechnung,
Mathematische Statistik,
Fehler- und Ausgleichsrechnung

7., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 550 Abbildungen, zahlreichen Beispielen
aus Naturwissenschaft und Technik sowie
295 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

 Springer Vieweg

Inhaltsverzeichnis

I Vektoranalysis	1
1 Ebene und räumliche Kurven	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes ..	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor	16
1.5 Krümmung einer Kurve	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleuni- gung in Tangential- und Normalkomponenten	27
2 Flächen im Raum	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	31
2.2 Flächenkurven	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$	43
3 Skalar- und Vektorfelder	47
3.1 Ein einführendes Beispiel	47
3.2 Skalarfelder	50
3.3 Vektorfelder	52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld	55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld)	56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder	59
4 Gradient eines Skalarfeldes	60
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten	60
4.2 Richtungsableitung	64
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$	66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung	68
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	70
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel	70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz	74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	77

5.2	Rotation eines Vektorfeldes	79
5.2.1	Definition und Eigenschaften der Rotation	79
5.2.2	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe	83
5.3	Spezielle Vektorfelder	85
5.3.1	Quellenfreies Vektorfeld	85
5.3.2	Wirbelfreies Vektorfeld	87
5.3.3	Laplace- und Poisson-Gleichung	89
5.3.4	Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ..	93
6	Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme	94
6.1	Polarkoordinaten	94
6.1.1	Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten	94
6.1.2	Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten	95
6.1.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten	101
6.1.4	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung	105
6.2	Zylinderkoordinaten	107
6.2.1	Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten	107
6.2.2	Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten	111
6.2.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten	116
6.2.4	Zylindersymmetrische Vektorfelder	119
6.2.5	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massen- punktes in Zylinderkoordinaten	121
6.3	Kugelkoordinaten	124
6.3.1	Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten	124
6.3.2	Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten	129
6.3.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten	135
6.3.4	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	137
6.3.5	Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel	140
7	Linien- oder Kurvenintegrale	143
7.1	Ein einführendes Beispiel	143
7.2	Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals	146
7.3	Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals	148
7.4	Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder	152
7.5	Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	163
7.5.1	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	163
7.5.2	Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	164
7.5.3	Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes	165
7.6	Arbeitsintegral	167
7.6.1	Arbeit eines Kraftfeldes	167
7.6.2	Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld	168

8 Oberflächenintegrale	170
8.1 Ein einführendes Beispiel	170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals	175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals	177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten ..	178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern	190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels	195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders	199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel	202
9 Integralsätze von Gauß und Stokes	205
9.1 Gaußscher Integralsatz	205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel	205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum	207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene	211
9.2 Stokesscher Integralsatz	214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	227
Übungsaufgaben	230
Zu Abschnitt 1	230
Zu Abschnitt 2	232
Zu Abschnitt 3	234
Zu Abschnitt 4	236
Zu Abschnitt 5	237
Zu Abschnitt 6	239
Zu Abschnitt 7	242
Zu Abschnitt 8	245
Zu Abschnitt 9	248
II Wahrscheinlichkeitsrechnung	251
1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik	251
1.1 Urnenmodell	251
1.2 Permutationen	252
1.3 Kombinationen	255
1.4 Variationen	260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	264
2 Grundbegriffe	264
2.1 Einführende Beispiele	264
2.2 Zufallsexperimente	268

2.3	Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments	269
2.4	Ereignisse und Ereignisraum	270
2.5	Verknüpfungen von Ereignissen	273
3	Wahrscheinlichkeit	276
3.1	Laplace-Experimente	276
3.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome	281
3.2.1	Eigenschaften der relativen Häufigkeiten	281
3.2.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	284
3.2.3	Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit)	286
3.2.4	Wahrscheinlichkeitsraum	287
3.3	Additionssatz für beliebige Ereignisse	290
3.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	292
3.5	Multiplikationssatz	295
3.6	Stochastisch unabhängige Ereignisse	299
3.7	Ereignisbäume	302
3.8	Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel	308
4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	315
4.1	Zufallsvariable oder Zufallsgrößen	315
4.1.1	Einführende Beispiele	315
4.1.2	Definition einer Zufallsvariablen	317
4.2	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	318
4.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung)	319
4.4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung)	327
5	Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung	335
5.1	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	336
5.1.1	Ein einführendes Beispiel	336
5.1.2	Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen	336
5.1.3	Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen	337
5.2	Erwartungswert einer Funktion	339
5.3	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls- variablen	340
5.4	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufalls- variablen	344
5.5	Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion	348
6	Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	350
6.1	Binomialverteilung	350
6.2	Hypergeometrische Verteilung	361
6.3	Poisson-Verteilung	367

6.4	Gaußsche Normalverteilung	371
6.4.1	Allgemeine Normalverteilung	371
6.4.2	Standardnormalverteilung	374
6.4.3	Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	376
6.4.4	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	378
6.4.5	Quantile der Standardnormalverteilung	388
6.5	Exponentialverteilung	390
6.6	Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung	393
6.7	Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung	401
7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	403
7.1	Ein einführendes Beispiel	403
7.2	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen	406
7.2.1	Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	406
7.2.2	Diskrete zweidimensionale Verteilung	408
7.2.3	Stetige zweidimensionale Verteilung	411
7.3	Stochastisch unabhängige Zufallsvariable	417
7.4	Funktionen von mehreren Zufallsvariablen	423
7.5	Summen und Produkte von Zufallsvariablen	425
7.5.1	Additionssatz für Mittelwerte	425
7.5.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	427
7.5.3	Additionssatz für Varianzen	430
7.5.4	Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen	433
7.6	Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen	436
7.6.1	Zentraler Grenzwertsatz	436
7.6.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen	438
7.6.3	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	440
8	Prüf- oder Testverteilungen	441
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung	441
8.2	t -Verteilung von Student	446
Übungsaufgaben		451
Zu Abschnitt 1		451
Zu Abschnitt 2		453
Zu Abschnitt 3		454
Zu Abschnitt 4		457
Zu Abschnitt 5		459
Zu Abschnitt 6		462
Zu Abschnitt 7		467

III Grundlagen der mathematischen Statistik	471
1 Grundbegriffe	471
1.1 Ein einführendes Beispiel	471
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	472
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	474
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe	474
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe	477
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen)	479
2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	485
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	486
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe	489
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeits- funktion	489
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	491
3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)	493
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung	493
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“)	494
3.2.1 Ein einführendes Beispiel	495
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen	495
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert μ	498
3.2.4 Schätzungen für die Varianz σ^2	499
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomial- verteilung)	500
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte	500
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen	503
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode	504
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	506
3.3.2.1 Binomialverteilung	506
3.3.2.2 Poisson-Verteilung	508
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung	511
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“)	514
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit	514
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert μ einer Normal- verteilung bei bekannter Varianz σ^2	518
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert μ einer Normal- verteilung bei unbekannter Varianz σ^2	525
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannt Varianz σ^2 einer Normal- verteilung	530

3.4.5	Vertrauensintervalle für einen unbekanntem Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	534
3.4.6	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert μ einer beliebigen Verteilung	539
4	Statistische Prüfverfahren für die unbekanntem Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameter-tests“)	540
4.1	Ein einführendes Beispiel	540
4.2	Statistische Hypothesen und Parameter-tests	544
4.3	Planung und Durchführung eines Parameter-tests	545
4.4	Mögliche Fehlerquellen bei einem Parameter-test	550
4.5	Spezielle Parameter-tests	555
4.5.1	Tests für den unbekanntem Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekanntem Varianz σ^2	555
4.5.2	Tests für den unbekanntem Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekanntem Varianz σ^2	564
4.5.3	Tests für die Gleichheit der unbekanntem Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen (Differenz-tests)	569
4.5.3.1	Abhängige und unabhängige Stichproben	569
4.5.3.2	Differenz-tests bei abhängigen Stichproben	571
4.5.3.3	Differenz-tests bei unabhängigen Stichproben	576
4.5.4	Tests für die unbekanntem Varianz σ^2 einer Normalverteilung	588
4.5.5	Tests für einen unbekanntem Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	593
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten	599
5	Statistische Prüfverfahren für die unbekanntem Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilung-tests“)	604
5.1	Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilung-tests	604
5.2	Ein einführendes Beispiel	605
5.3	Chi-Quadrat-Test („ χ^2 -Test“)	607
6	Korrelation und Regression	620
6.1	Korrelation	620
6.1.1	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe	620
6.1.2	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit	630
6.2	Regression	633
Übungsaufgaben	639
	Zu Abschnitt 1	639
	Zu Abschnitt 2	641
	Zu Abschnitt 3	642
	Zu Abschnitt 4	644
	Zu Abschnitt 5	647
	Zu Abschnitt 6	648

IV Fehler- und Ausgleichsrechnung	650
1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen).	
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung	650
2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)	654
2.1 Häufigkeitsverteilungen	654
2.2 Normalverteilte Messgrößen	656
3 Auswertung einer Messreihe	662
3.1 Mittelwert und Standardabweichung	662
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert μ , Messunsicherheit, Messergebnis ...	670
4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß	679
4.1 Ein einführendes Beispiel	679
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße	680
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz)	683
4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße	687
5 Ausgleichs- oder Regressionskurven	694
5.1 Ein einführendes Beispiel	694
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“	696
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade	701
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden	701
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung ...	709
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel	715
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurück- führbar sind	719
Übungsaufgaben	730
Zu Abschnitt 3	730
Zu Abschnitt 4	732
Zu Abschnitt 5	734