

# Mathematik für Ökonomen

## Grundlagen, Methoden und Anwendungen

von

Alpha C. Chiang

em. Professor an der University of Connecticut

und

Kevin Wainwright

Professor am

British Columbia Institute of Technology

- Simon Fraser University

und

Harald Nitsch

Professor für Immobilienökonomik

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

UNIVERSITÄT  
LIECHTENSTEIN

Verlag Franz Vahlen München

# Inhaltsverzeichnis

Teil 1: Einführung			
<b>Kapitel 1</b>	Mathematik für Ökonomen		
1.1	Mathematische und nicht-mathematische Ökonomik im Vergleich		
1.2	Die Abgrenzung mathematischer Ökonomik von der Ökonometrie		
<b>Kapitel 2</b>	Ökonomische Modelle		
2.1	Bausteine eines mathematischen Modells		
2.2	Die Reellen Zahlen	9	
2.3	Das Konzept der Menge	10	
2.4	Relationen und Funktionen	14	
2.5	Funktionstypen	17	
2.6	Funktionen von zwei oder mehr unabhängigen Variablen	19	
2.7	Grade der Allgemeinheit	21	
Teil 2: Statische (Gleichgewichts-) Analyse		23	
<b>Kapitel 3</b>	Gleichgewichtsanalyse in der Ökonomie	25	
3.1	Die Bedeutung des Begriffs Gleichgewicht	26	
3.2	Partielles Marktgleichgewicht - ein lineares Modell	26	
3.3	Partielles Marktgleichgewicht - ein nicht-lineares Modell	28	
3.4	Allgemeines Marktgleichgewicht	32	
3.5	Gleichgewichte in Makroökonomischen Kreislaufmodellen	35	
<b>Kapitel 4</b>	Lineare Modelle und Matrizenrechnung	37	
4.1	Matrizen und Vektoren	38	
4.2	Matrizenoperationen	39	
4.3	Anmerkungen zu Operationen mit Vektoren	44	
4.4	Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz	49	
4.5	Einheitsmatrizen und Nullmatrizen	51	
4.6	Transponierte und inverse Matrizen	52	
4.7	Endliche Markovketten	56	
<b>Kapitel 5</b>	Lineare Modelle und Matrizenrechnung (Fortsetzung)	59	
5.1	Bedingungen für die Regularität einer Matrix	60	
5.2	Test auf Regularität mit Hilfe der Determinante	63	
5.3	Grundlegende Eigenschaften von Determinanten	66	
5.4	Bestimmung der inversen Matrix	70	
5.5	Die Cramersche Regel	72	
5.6	Anwendungen auf Markt- und Kreislaufmodelle	74	
5.7	Leontief Input-Output-Modelle	77	
5.8	Die Grenzen der statischen Analyse	82	
Teil 3: Komperativ-Statistische Analyse			83
<b>Kapitel 6</b>	Komparative Statik und das Konzept der Ableitung		85
6.1	Der Ansatz der Komparativen Statik	86	
6.2	Veränderungsrate und Ableitung	86	
6.3	Die Ableitung und die Steigung einer Funktion	88	
6.4	Das Konzept des Grenzwerts	88	
6.5	Exkurs über Ungleichungen und Beträge	92	
6.6	Sätze über Grenzwerte	95	
6.7	Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion	96	
<b>Kapitel 7</b>	Ableitungsregeln und ihre Anwendung in der komparativen Statik		101
7.1	Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen	102	
7.2	Ableitungsregeln für zwei oder mehr Funktionen derselben Variablen	104	
7.3	Ableitungsregeln für Funktionen unterschiedlicher Variablen	109	
7.4	Partielle Ableitung	111	
7.5	Anwendungen in der komparativ statischen Analyse	114	
7.6	Anmerkung zu Jacobi-Determinanten	117	

<b>Kapitel 8</b>	Komparativ-statische Analyse von Modellen mit allgemein spezifizierten Funktionen	119	<b>11.6</b>	Anwendungen in der Ökonomie	215	
	8.1	Differentiale	120	<b>11.7</b>	Komparativ-Statistische Aspekte der Optimierung	222
	8.2	Totales Differential	123	<b>Kapitel 12</b>	Optimierung unter Gleichheitsrestriktionen	225
	8.3	Regeln für Differentiale	125	<b>12.1</b>	Wirkung einer Restriktion	226
	8.4	Totale Ableitungen	126	<b>12.2</b>	Bestimmung der stationären Werte	227
	8.5	Ableitungen impliziter Funktionen	129	<b>12.3</b>	Bedingungen zweiter Ordnung	231
	8.6	Komparative Statik allgemein formulierter Modelle	135	<b>12.4</b>	Quasikonkavität und Quasikonvexität	236
	8.7	Grenzen der komparativen Statik	143	<b>12.5</b>	Nutzenmaximierung und Konsumnachfrage	242
<b>Teil 4:</b>	<b>Optimierungsprobleme</b>	<b>145</b>	<b>12.6</b>	Homogene Funktionen	248	
			<b>12.7</b>	Minimalkostenkombinationen von Inputfaktoren	252	
<b>Kapitel 9</b>	Optimierung: Eine Form der Gleichgewichtsanalyse	147	<b>Kapitel 13</b>	Weiterführende Probleme der Optimierung	261	
	9.1	Optima und Extremwerte	148	<b>13.1</b>	Nichtlineare Programmierung und Kuhn-Tucker-Bedingungen	262
	9.2	Lokales Maximum und Minimum: Überprüfung der ersten Ableitung	149	<b>13.2</b>	Regularitätsbedingung	268
	9.3	Zweite und höhere Ableitungen	152	<b>13.3</b>	Ökonomische Anwendungen	272
	9.4	Überprüfung der zweiten Ableitung	156	<b>13.4</b>	Sätze über hinreichende Bedingungen in der nichtlinearen Programmierung	275
	9.5	Maclaurin Reihe und Taylorreihe	161	<b>13.5</b>	Maximalwertfunktionen und Envelope-Theorem)	278
	9.6	Bestimmung von Extremwerten von Funktionen einer Variablen durch Prüfung der n-ten Ableitung	166	<b>13.6</b>	Dualität und Envelope-Theorem	282
			<b>13.7</b>	Einige abschließende Bemerkungen	286	
<b>Kapitel 10</b>	Exponentialfunktion und Logarithmus	169	<b>Teil 5:</b>	<b>Dynamische Analyse</b>	<b>287</b>	
	<b>10.1</b>	Das Wesen der Exponentialfunktionen	170	<b>Kapitel 14</b>	Dynamische ökonomische Modelle und Integralrechnung	289
	<b>10.2</b>	Natürliche Exponentialfunktion und Wachstum	173	<b>14.1</b>	Dynamik und Integration	290
	<b>10.3</b>	Logarithmen	177	<b>14.2</b>	Unbestimmte Integrale	291
	<b>10.4</b>	Logarithmusfunktion	179	<b>14.3</b>	Bestimmte Integrale	296
	<b>10.5</b>	Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen	182	<b>14.4</b>	Uneigentliche Integrale	300
	<b>10.6</b>	Wahl des optimalen Zeitpunkts	185	<b>14.5</b>	Einige ökonomische Anwendungen von Integralen	302
	<b>10.7</b>	Weitere Anwendungen exponentieller und logarithmischer Ableitungen	188	<b>14.6</b>	Das Domar Wachstumsmodell	306
<b>Kapitel 11</b>	Probleme mit mehr als einer Entscheidungsvariablen	191	<b>Kapitel 15</b>	Stetige Zeit: Differentialgleichungen erster Ordnung	309	
	11.1	Die Differentialversion der Optimalitätsbedingungen	192	<b>15.1</b>	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Term	310
	11.2	Extremwerte einer Funktion zweier Variablen	193	<b>15.2</b>	Dynamik von Marktpreisen	312
	11.3	Quadratische Formen - ein Exkurs	197	<b>15.3</b>	Variable Koeffizienten und variabler Term	315
	11.4	Zielfunktionen mit mehr als zwei Variablen	204	<b>15.4</b>	Exakte Differentialgleichungen	317
	11.5	Der Bezug von Bedingungen zweiter Ordnung zu Konkavität und Konvexität	207	<b>15.5</b>	Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades	320

15.6	Qualitativ graphische Analyse	322	<b>Kapitel 19</b>	Systeme simultaner Differentialgleichungen und Differenzgleichungen	387
15.7	Solow Wachstumsmodell	324	<b>19.1</b>	Die Entstehung dynamischer Systeme	388
<b>Kapitel 16</b>	Differentialgleichungen höherer Ordnung	327	<b>19.2</b>	Die Lösung simultaner dynamischer Gleichungen	389
<b>16.1</b>	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Term	328	<b>19.3</b>	Dynamische Input-Output-Modelle	394
<b>16.2</b>	Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen	332	<b>19.4</b>	Eine weitere Variante des Modells von Inflation und Arbeitslosigkeit	398
<b>16.3</b>	Untersuchung des Falls komplexer Nullstellen	339	<b>19.5</b>	Phasendiagramme zweier Variablen	401
<b>16.4</b>	Ein Marktmodell mit Preisermartungen	342	<b>19.6</b>	Linearisierung eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems	407
<b>16.5</b>	Die Wechselbeziehung zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit	345	<b>Kapitel 20</b>	Dynamische Optimierung in stetiger Zeit	413
<b>16.6</b>	Differentialgleichungen mit variablem Term	348	<b>20.1</b>	Das Wesen der optimalen Steuerung	414
<b>16.7</b>	Differentialgleichungen höherer Ordnung	349	<b>20.2</b>	Alternative Endbedingungen	418
<b>Kapitel 17</b>	Modelle in diskreter Zeit: Differenzgleichungen erster Ordnung	353	<b>20.3</b>	Autonome Probleme	421
<b>17.1</b>	Diskrete Zeit, Differenzen und Differenzgleichungen	354	<b>20.4</b>	Ökonomische Anwendungen	422
<b>17.2</b>	Lösung einer Differenzgleichung erster Ordnung	355	<b>20.5</b>	Unendlicher Zeithorizont	424
<b>17.3</b>	Die dynamische Stabilität von Gleichgewichten	358	<b>20.6</b>	Grenzen der dynamischen Analyse	426
<b>17.4</b>	Das Spinnwebmodell	360	<b>Teil 6: Grundlagen der Finanzmathematik</b>		<b>429</b>
<b>17.5</b>	Ein Marktmodell mit Lagerhaltung	363	<b>Kapitel 21</b>	Grundlagen der Finanzmathematik	431
<b>17.6</b>	Nichtlineare Differenzgleichungen - Die qualitativ-graphische Analyse	365	<b>21.1</b>	Barwert und finanzmathematische Äquivalenz	432
<b>Kapitel 18</b>	Differenzgleichungen höherer Ordnung	369	<b>21.2</b>	Endliche Rentenzahlungen	433
<b>18.1</b>	Lineare Differenzgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Term	370	<b>21.3</b>	Vermögensanlagen mit unendlicher Laufzeit	438
<b>18.2</b>	Das Multiplikator-Akzelerator-Modell von Samuelson	374	<b>21.4</b>	Annuitätendarlehen	440
<b>18.3</b>	Inflation und Arbeitslosigkeit in diskreter Zeit	378	<b>21.5</b>	Wirkung eines Disagio	443
<b>18.4</b>	Verallgemeinerung zu variablen Termen und Gleichungen höherer Ordnung	381	<b>21.6</b>	Fazit	447
			<b>Das griechische Alphabet</b>		<b>449</b>
			<b>Mathematische Symbole</b>		<b>450</b>
			<b>Eine kurze Liste von Literaturempfehlungen</b>		<b>453</b>
			<b>Antworten zu ausgewählten Aufgaben</b>		<b>455</b>
			<b>Sachverzeichnis</b>		<b>465</b>